練習問題 解答＆解説

1章

① 式(1·5) $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ を使いましょう．

電荷 Q〔C〕がつくる電界 $\boldsymbol{E}_1$ は $\boldsymbol{E}_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q(-a\boldsymbol{a}_x+z\boldsymbol{a}_z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

電荷 $-Q$〔C〕がつくる電界 $\boldsymbol{E}_2$ は $\boldsymbol{E}_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-Q(a\boldsymbol{a}_x+z\boldsymbol{a}_z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

電界は足し合わせればよいので

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(-a\boldsymbol{a}_x+z\boldsymbol{a}_z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q(a\boldsymbol{a}_x+z\boldsymbol{a}_z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}=\frac{-Qa\boldsymbol{a}_x}{2\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\ \text{〔V/m〕}$$

② 半径 r，高さ h の円柱の閉曲面をとります．

(Ⅰ-ⅰ) $r<a$ のとき

ガウスの法則「(表面積)×(電界)＝(総電気量)/ε_0」で

左辺 $=2\pi rh\times E=2\pi rhE$　　右辺 $=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2h\rho$

これより，$E=\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}$〔V/m〕

(Ⅰ-ⅱ) $a<r$ のとき

左辺 $=2\pi rh\times E=2\pi rhE$　　右辺 $=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\pi a^2h\rho$

これより，$E=\dfrac{\rho a^2}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0 r}$〔V/m〕

電位は $V=-\displaystyle\int_{r_0}^{r}Edr=-\int_{r_0}^{r}\frac{\rho a^2}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0 r}dr=\frac{\rho a^2}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$〔V〕

$$V(a)=\frac{\rho a^2}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{a}$$

(Ⅱ-ⅰ) $r<a$ のとき

$$V=-\int_a^r Edr+V(a)=-\int_a^r\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr+V(a)$$

$$=-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(r^2-a^2)+\frac{\rho a^2}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{a}\ \text{〔V〕}$$

③ ここでは，閉曲面は球を取るが，電荷密度が場所によって変化するので，ガウスの法則は式(1·7)を使って，右辺を積分する必要があります．

（Ⅰ-ⅰ）$r<a$ のとき

左辺$=4\pi r^2 E$

$$右辺=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dv=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0\left(\frac{r}{a}-1\right)dv=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0\left(\frac{r}{a}-1\right)r^2\sin\theta drd\phi d\theta$$

$$=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^r\left(\frac{r}{a}-1\right)r^2dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=-\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^4}{4a}-\frac{r^3}{3}\right]_0^r$$

$$=-\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{4a}-\frac{r^3}{3}\right)$$

よって　$E=-\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{4a}-\dfrac{r}{3}\right)$〔V/m〕

（Ⅰ-ⅱ）$a<r$ のとき

左辺$=4\pi r^2 E$

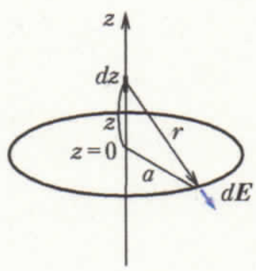
$$右辺=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^a\left(\frac{r}{a}-1\right)r^2dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$=-\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^4}{4a}-\frac{r^3}{3}\right]_0^a=-\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^4}{4a}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{\pi\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}$$

よって　$E=-\dfrac{\rho_0 a^3}{12\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$〔V/m〕

---

④ (1) 右図より，



$$d\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{(z^2+a^2)^{3/2}}(-z\boldsymbol{a}_z+a\boldsymbol{a}_r)$$

ここで，$\boldsymbol{a}_z$, $\boldsymbol{a}_r$ はそれぞれ，円柱座標 z 方向，r 方向の単位ベクトル．

(2) これを z 軸全体で積分する．

$$\boldsymbol{E}=\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{E}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{(z^2+a^2)^{3/2}}(-z\boldsymbol{a}_z+a\boldsymbol{a}_r)$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-zdz}{(z^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{a}_z+a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{a}_r\right)$$

1項目の積分はゼロになり，2項目の積分は，$z=a\tan\theta$ とする置換積分により求めると，

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{a}_r〔V/m〕$$

これはガウスの法則で求めたものと一致している．
