線形数学 II 基本問題集

担当：新國裕昭

記号の注意

- 実数全体の集合のことを $\mathbb{R}$ または $\mathbf{R}$ と表す (通常の R とは区別して記述すること(注 1)).
- 複素数全体の集合のことを $\mathbb{C}$ または $\mathbf{C}$ と表す (通常の C とは区別して記述すること).

4 種類のカッコを区別しましょう 線形代数 II では，n 個の縦ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ があったときに, それをどういうカッコで囲むかによって次のように意味が変わってしまうので注意が必要です.

(1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ は集合です. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が要素になっている集合のことを表す際に使います.

(2) $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$ は行列を表します(注 2).

(3) $|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n|$ は行列式を表します(注 3).

(4) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$ は下記の問題 $\boxed{1}$ の (3) の意味で $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ の生成する部分空間を表します. これもベクトルからなる集合です. (1) の集合には $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ の n 個のベクトルしか含まれていませんが, (4) の集合には $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a_n}$ の形をしているベクトルはすべて含まれるので無限個のベクトルが含まれています. 例えば, ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に対して, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ という集合には, $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ や $3\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3$ などのベクトルが含まれます.

※ また, (1)〜(4) の記号において, コンマがあるものとないものがありますので注意しましょう.

$\boxed{1}$(基礎事項のチェック(注 4))　以下の問いに答えなさい.

(1)　$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 W が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることの定義を述べよ.

(2)　$\mathbb{R}^n$ の r 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が一次独立であることの定義を述べよ.

(3)　W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする.

W の r 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ に対して, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ の定義を答えよ. また，ベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ が W の基底であることの定義を述べよ.

解答例　(1) $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 W は，任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \in W$ となるとき，$\mathbb{R}^n$ の部分空間であるという.

(2) V のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ に対して，$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ (但し, $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ とする) ならば, $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ を満たすとき，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は一次独立であるという.

(3) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r \mid \ c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}\}$ である.

また，$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ が W の基底であるとは， 次の 2 条件を満たすことをいう:

① $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は一次独立である.

② W の任意のベクトル $\mathbf{v}$ が $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r$ $(c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R})$ の形で表せることである(注 5).

(注 1)ホワイトボードに板書しているもの真似て書いてください.

(注 2)例えば, $\boxed{2}$の問題にあるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に対して, $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$ は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のことを意味します.

(注 3)例えば, $\boxed{2}$の問題にあるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に対して, $|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3|$ は行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ のことを意味します.

(注 4)よく期末試験はどんな問題が出ますか，と聞かれますが，この問題のような定義の意味を確認する問題は計算問題に取り組む以前に理解しておくことが不可欠な項目ですので，出題するかもしれません. わかっていて当たり前，というところもありますので出題しないかもしれません. とにかく, 物事の定義は大切にしてください. 数学を計算の仕方を勉強するものである，とは考えないようにしましょう.

(注 5)$W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ である, と書いても同じことを意味する. また，V の任意のベクトル $\mathbf{v}$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の一次結合で書ける, と言ってもよい.

□

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は一次独立か一次従属かを，定義に従って調べよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ とおく. この時, $\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ であるから，これを解いて, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる. よって, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立である. □

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ とおく. この時，次の問いに答えよ.

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示しなさい.

(2) W の基底をひと組求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) ゼロベクトル $\mathbf{o}$ は $A\mathbf{o} = \mathbf{o}$ を満たすので, $\mathbf{o} \in W$ である. よって, W は空集合ではない(注 6). また, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を任意に取る. まず, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W$ より, $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ を満たす. 故に, $A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 = c_1\mathbf{o} + c_2\mathbf{o} = \mathbf{o}$ となり，これは $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in W$ であることを意味する.

(2) $A \to \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ より, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ は $x_1 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$, $x_3 - 2x_4 = 0$ と同値である. $\operatorname{rank} A = 3$ より, $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $4 - \operatorname{rank} A = 1$ 個の任意定数 c を用いて表される. $x_4 = c$ とおくと, $x_3 = 2c$, $x_2 = -c$ を得る. ゆえに，$A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. よって, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ であり, $\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ は W の基底となる. また, $\dim W = 1$ である. □

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立か一次従属かを調べよ.

$\boxed{\text{解答例 1}}$(注 7) $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$ とおく. このとき,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ①$$

より, $\operatorname{rank} A = 2$. よって, $\operatorname{rank} A \neq 3$ なので，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属である(注 8). □

(注 6)考えている集合が空集合でない，ということを確かめることも部分空間であることの条件のひとつとして必要なことです. お忘れなく.

(注 7)$\boxed{2}$のように定義に従って調べてもよい. ここでは，別のやり方として，教科書の定理 3.6 を用いる方法で解く.

(注 8)今の場合の 3 は，考えているベクトルの個数である.

$\boxed{\text{解答例 2}}$ [注 9] $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$ とおく.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$$

より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属である [注 10]. □

$\boxed{\text{解答例 3}}$ [注 11] $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$ とおくと, $\begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる. よって, $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$ とおいて, 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{o}$ を解いて, $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ となる解が存在するかどうかを調べればよい. ① のように計算して $\operatorname{rank} A = 2$ となる. 故に, $3 - \operatorname{rank} A = 1$ 個の任意定数 c を用いて解が書ける. $c_3 = c$ とおくと, $c_2 = 2c$, $c_1 = -c$. よって, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. 故に, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ 以外にも $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$ を満たす (c_1, c_2, c_3) が存在する. よって, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属である. □

$\boxed{5}$ $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底になることを示せ.

$\boxed{\text{解答例}}$ 基底の定義に立ち戻り,

① $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が一次独立である. ② 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の一次結合で表せる.

の 2 点が成り立つことを示す.

まず, ① について考える [注 12]. $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4)$ とおくと,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$$

より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が一次独立である.

次に ② について考える. 任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ を考える. $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4$ を満たす c_1, c_2, c_3, c_4 を構成すればよい. これは, $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4)$ を用いて, $A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$ という連立一次方程式を意味する.

(注 9) $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$ が正方行列になるときには, 教科書の定理 3.5 を使ってチェックすることもできる. 解答例 1 の方が, A が正方行列にならなくても使えるので適応範囲が広い.

(注 10) 教科書の定理 3.5 によれば, $|A| \neq 0$ であることが $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立であることの必要十分条件なので, $|A| = 0$ なら, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属であるといえる.

(注 11) 定義通りに解けば解答例 3 のようになる. このやり方が最も素直なやり方である. 同値な条件は定理 3.5, 定理 3.6 のようにあるにはあるが, 本来の定義は何かを見失うのであれば本末転倒である.

(注 12) 前問の解答例 2 のやり方で示す.

この方程式の拡大係数行列 $(A \quad \mathbf{x})$ に対して，

$$
(A \quad \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 - x_1 + x_2 - x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 - x_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}
$$

となる．したがって，$c_1 = x_1 - x_2 + x_4$, $c_2 = x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4$, $c_3 = x_2 - x_4$, $c_4 = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4$ とすれば，$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4$ が成り立つ．故に，$\mathbb{R}^4$ の任意の元は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の一次結合で表せる．

①, ② より，$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底であることがわかる． □

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$
W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}
$$

に対して以下の問いに答えなさい．

(1) W_1, W_2 のひと組の基底を求めよ．また，それぞれの次元を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ のひと組の基底を求めよ．また，$\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．

(3) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ であることを示しなさい．

解答例 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\operatorname{rank} A = 2$ であるから，$A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は，$4 - \operatorname{rank} A = 2$ 個の任意の定数 c_1, c_2 を用いて表せる．$x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおくと，$x_1 = -c_1$, $x_2 = c_2$ となるので，$A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

である．よって，W_1 の基底として，$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ であり，$\dim W_1 = 2$ であることがわかる．

次に W_2 について考える．$B = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ とおくと，$\operatorname{rank} B = 1$ であるから，$B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は，$4 - \operatorname{rank} B = 3$ 個の任意の定数 c_1, c_2, c_3 を用いて表される．$x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, $x_4 = c_3$ とおくと，$x_1 = -c_1 - c_2 - c_3$ とかけるので，$B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は，

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

と表される．よって，W_2 の基底として，$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が得られる．故に，$\dim W_2 = 3$ であることがわかる．

(2) まず,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

であることに注意する. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より, $\operatorname{rank} C = 3$ である. よって, $C\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $4 - \operatorname{rank} C = 1$ 個の任意定数 c を用いて解が表せる. C の基本変形後の行列の係数を比較して, $x_1 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_4 = 0$ を得る. これからまず $x_2 = 0$ である. $x_3 = c$ とおけば, $x_1 = -c$ となって, $C\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる. よって, $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ が $W_1 \cap W_2$ のひと組の基底となり, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ となることがわかる.

(3) (1) の結果から, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくことにしておくと, $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ であることがわかる.

以下, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ であることを示す. $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ であるから, $W_1 + W_2 \subset \mathbb{R}^4$ であることは明らかである. したがって, 以下, 逆の包含関係である $W_1 + W_2 \supset \mathbb{R}^4$ が成り立つことを示せばよい(注 13). $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ を任意に取る. $\mathbf{x}$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の一次結合として表せることを示せばよい(注 14).
$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_3 - c_4 \\ c_2 + c_3 \\ c_1 \\ c_2 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

である. これを解くと(注 15), $c_1 = x_3, c_2 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}, c_3 = \dfrac{-x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{2}, c_4 = \dfrac{-x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{2}$ が得られる. つまり, このような $c_1, c_2, c_3 . c_4$ に対して, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4$ が成り立つ. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ は任意だったので, $\mathbb{R}^4$ のどのベクトルも $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の一次結合として表せる. よって, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle \supset \mathbb{R}^4$ である.

以上により, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle = \mathbb{R}^4$ が得られた. □

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ のひと組の基底と $\dim W$ を求めよ.

(注 13) 一般に, 集合 A, B に対して,「$A = B$ であること」と「$A \subset B$ かつ $A \supset B$ であること」は必要十分条件になります. また, $A \subset B$ であることを示すには,「任意の $a \in A$ に対して $a \in B$ である」ということを示せばよいですね.
(注 14) すなわち, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4$ を満たす c_1, c_2, c_3, c_4 が存在することを示せばよい.
(注 15) 連立一次方程式なので, 例えば掃き出し法などで解けばよい.

解答例　W を生成している 4 つのベクトルを順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ とし, $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4)$ とおく[注 16].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，$\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ であり, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次独立であることがわかる[注 17]. よって, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ は W の基底となる. また, $\dim W = 3$ である. □

8　$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立であるとする. このとき, ベクトル $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$ も一次独立となることを示しなさい.

解答例　$c_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + c_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + c_3(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3) = \mathbf{o}$ とおく. このとき,

$$(c_1 + c_3)\mathbf{a}_1 + (-c_1 + c_2)\mathbf{a}_2 + (c_2 + 2c_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$$

である. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立であるので, $c_1 + c_3 = 0, -c_1 + c_2 = 0, c_2 + 2c_3 = 0$ である. これらを解いて, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が得られる. ゆえに，$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$ も一次独立であると言える. □

9　$\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

について以下の問いに答えなさい.

(1)　W_1, W_2 のひと組の基底を求めよ．また，それぞれの次元を求めよ.

(2)　$W_1 \cap W_2$ のひと組の基底を求めよ．また，$\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ.

(3)　$W_1 + W_2$ のひと組の基底を求めよ. また, $\dim(W_1 + W_2)$ を求めよ.

解答例 (1)　まず W_1 について考える. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} A = 2$. よって, $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ は $4 - \operatorname{rank} A = 2$ 個の任意の定数 c_1, c_2 を用いて表される. $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ とおくと, $x_1 = -2c_1 + c_2$, $x_2 = -x_1 - x_3 = c_1 - c_2$ である. よって, $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. よって, W_1 の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ であり, $\dim W_1 = 2$ となる.

[注 16] 当たり前のことですが，答案を書くときは新たに出てくる文字（今の場合は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, そして行列 A のこと）が何を意味するのかは自分で定義する文章を書く事にしましょう.「〜を〜とおく」などの文章は面倒だから省略する, という人は非常に多いです. 自己中心的な答案ではなく相手に分かるような文章を作ることは, 今後の人生（例えば就職活動など）でも必要とされる重要な資質の一つです. 数学を通して自己中心的な文章を書かない訓練もしていくことが大切です.

[注 17] その理由は授業中に説明しました．いま，行列 A を基本変形して, $(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ という行列が出来上がりました (ここで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の標準基底を意味するものとする). 基本変形のひとつひとつの作業が基本行列を掛けていることだと知っていれば，A の基本変形の計算から, ある正則行列 P が存在して, $PA = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, すなわち, $(P\mathbf{a}_1 \quad P\mathbf{a}_2 \quad P\mathbf{a}_3 \quad P\mathbf{a}_4) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ であることがわかります. したがって，$P\mathbf{a}_4 = P\mathbf{a}_1 - P\mathbf{a}_2 - P\mathbf{a}_3$ という関係式が見えてきて、両辺に P^{-1} をかければ, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ であることが浮かび上がります. また, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次独立であることを示すには，もちろん, $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$ を仮定して, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ であることを見れば良いわけです. $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$ を仮定すると，両辺に P をかければ $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$ ということがわかります. よって, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ であることが得られるというわけです. このことをきちんと理解した上で，7 の解答例にあるような解答が書けるようになってください.

次に W_2 について考える. $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ であるから, $\operatorname{rank} B = 3$ である. よって, $B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $4 - \operatorname{rank} B = 1$ 個の任意定数 c を用いて表される. $B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ は

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

と同値であるから, $x_4 = 2c$ とおくと, $x_2 = -2c, x_3 = -c, x_1 = 3c$ を得る. よって, $B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である. 従って, W_2 の基底として $\{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ が取れて, $\dim W_2 = 1$ となる.

(2) まず $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$ である. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので, $C\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ のみ. 故に, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{o}\}$ で $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ となる.

(3) (1) の結果から, $W_1 + W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ である(注 18).

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから, $\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ は $W_1 + W_2$ のひと組の基底 となり, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ となる. □

(注 18) この段階で $W_1 + W_2$ の次元は 3 と言わないように注意 (結果的に答えがあっていても減点します.). この 3 つのベクトルが基底であることをきちんと確かめる議論が必要です. 今の場合は, 3 つのベクトルが $W_1 + W_2$ を張るのは見て分かるので, 3 つのベクトルが一次独立であることを確かめる必要があります.

$\boxed{10}$ 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像である事の定義を述べよ[注 19].

$\boxed{\text{解答例}}$ 任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $f(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2) = c_1 f(\mathbf{u}_1) + c_2 f(\mathbf{u}_2)$ が成り立つ時, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であるという[注 20]. □

$\boxed{11}$ 写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める時, 写像 f は線形写像かどうか調べよ.

(1) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x - 3y + z \end{pmatrix}$ (2) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy + z \\ -y + z \end{pmatrix}$

(3) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x \end{pmatrix}$ (4) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xyz \\ x + y + z \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とおくと, 任意の実数 λ, μ に対して,

$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) &= f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + 3(\lambda z_1 + \mu z_2) \\ 2(\lambda x_1 + \mu x_2) - 3(\lambda y_1 + \mu y_2) + \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1 \\ 2\lambda x_1 - 3\lambda y_1 + \lambda z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_2 + 2\mu y_2 + 3\mu z_2 \\ 2\mu x_2 - 3\mu y_2 + \mu z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 + 3z_1 \\ 2x_1 - 3y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 + 3z_2 \\ 2x_2 - 3y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(\mathbf{v}_1) + \mu f(\mathbf{v}_2)
\end{aligned}$$

が成り立つので, f は線型写像である.

(2) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく. 実数 λ に対して,

$$f(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 xy + \lambda z \\ -\lambda y + \lambda z \end{pmatrix}, \qquad \lambda f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda xy + \lambda z \\ -\lambda y + \lambda z \end{pmatrix}$$

より, $\lambda \neq 0, 1$ に対して $f(\lambda\mathbf{v}) \neq \lambda f(\mathbf{v})$ であるから f は線型写像ではない.

(3) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく. 実数 λ に対して,

$$f(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \lambda x \end{pmatrix}, \qquad \lambda f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda(x^2 + y^2 + z^2) \\ \lambda x \end{pmatrix}$$

より, $\lambda \neq 0, 1$ に対して $f(\lambda\mathbf{v}) \neq \lambda f(\mathbf{v})$ であるから f は線型写像ではない.

[注 19] 線形写像と書いても良いし，線型写像と書いても良い. 以下，特に統一せずに用語を用いることにする.

[注 20] 「① 任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2)$ が成り立つ」,「② 任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ に対して $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$ が成り立つ」の２条件と同値である. 線形写像であることを示すのにこの両方の性質が成り立つ事を示すのでもよい. 逆に言えば，線形写像でないことを確かめるのには ①, ② のどちらか一方でも成り立たないことを示せばよいとも言える.

(4) $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく. 実数 λ に対して,

$$f(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}\lambda^3xyz\\\lambda(x+y+z)\end{pmatrix},\qquad \lambda f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}\lambda xyz\\\lambda(x+y+z)\end{pmatrix}$$

より, $\lambda\neq 0,\pm1$ に対して $f(\lambda\mathbf{v})\neq\lambda f(\mathbf{v})$ であるから f は線型写像ではない. □

$\boxed{12}$ 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を $f(x)=\begin{pmatrix}ax^2+bx\\c\end{pmatrix}$ で定義するとき, 写像 f が線形写像になるための条件を求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ f が線形写像であるためには, 任意の実数 λ に対して, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ が成り立たなければならない.

$$f(\lambda x)=\begin{pmatrix}a\lambda^2x^2+b\lambda x\\c\end{pmatrix},\qquad \lambda f(x)=\begin{pmatrix}a\lambda x^2+b\lambda x\\\lambda c\end{pmatrix}$$

であるから, $c=a=0$ を得る. このとき, 写像 $f(x)=\begin{pmatrix}bx\\0\end{pmatrix}$ は線形写像であるから, $a=c=0$ (b は何でもよい) が f が線形写像であるための条件である. □

$\boxed{13}$ 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を $f(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\end{pmatrix}$ で定義するとき, 写像 f が線形写像かどうか調べよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ 実数 λ に対して,

$$f(\lambda x)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\\cos\lambda x\end{pmatrix},\qquad \lambda f(x)=\begin{pmatrix}\lambda\sin x\\\lambda\cos x\end{pmatrix}$$

は一般に異なるので, f は線型写像ではない. □

$\boxed{14}$ 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $f(\mathbf{x})=\mathbf{o}$ で定めるとき, 写像 f は線形写像かどうか調べよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ 任意の $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ に対して,

$$f(\lambda x+\mu y)=\mathbf{o}=\lambda\mathbf{o}+\mu\mathbf{o}=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

であるから, f は線型写像である. □

$\boxed{15}$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とする. この時，次の問いに答えなさい.

(1) $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ のゼロベクトルをそれぞれ $\mathbf{o}_n,\mathbf{o}_m$ と書く. この時, $f(\mathbf{o}_n)=\mathbf{o}_m$ であることを示しなさい.

(2) $\mathrm{Ker}\,f,\mathrm{Im}\,f$ の定義を述べよ.

(3) $\mathrm{Ker}\,f$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示しなさい.

(4) $\mathrm{Im}\,f$ が $\mathbb{R}^m$ の部分空間であることを示しなさい.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $f(\mathbf{o}_n)=f(0\cdot\mathbf{o}_n)=0\cdot f(\mathbf{o}_n)=\mathbf{o}_m$ である[注 21].

(2) $\mathrm{Ker}\,f=\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n|\quad f(\mathbf{u})=\mathbf{o}_m\}$, $\mathrm{Im}\,f=\{f(\mathbf{u})\in\mathbb{R}^m|\quad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n\}$ である.

(3)[注 22] (1) より, $f(\mathbf{o}_n)=\mathbf{o}_m$ であるので, $\mathbf{o}_n\in\mathrm{Ker}\,f$ である. 故に, まずは $\mathrm{Ker}\,f\neq\emptyset$ であることが言える.

[注 21] 2 つ目の等式には線形写像の性質（注釈 17 の ② の性質）が使われている．3 つ目の等式には, ベクトル空間の性質「任意の $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m$ に対して, $0\cdot\mathbf{v}=\mathbf{o}_m$ である」が使われている. 実際, $\mathbf{v}$ として $f(\mathbf{o}_n)$(これは V のベクトルである.) を代入しても成り立つ. 1 回目の講義でやってベクトル空間の定義と照らし合わせよ.

[注 22] 部分空間であることの定義は $\boxed{1}$ で確かめられる. その定義にある条件をすべて満たすことを示せば良いわけである.

次に, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$, $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ を任意に取る．この時，$\mathrm{Ker}\, f$ の定義から, $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}_m$, $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{o}_m$ である．これと線形写像の定義から,

$$f(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2) = c_1 f(\mathbf{u}_1) + c_2 f(\mathbf{u}_2) = c_1\mathbf{o}_m + c_2\mathbf{o}_m = \mathbf{o}_m$$

となる．よって, $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ であることがわかる．以上により, $\mathrm{Ker}\, f$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

(4)　(1) より, $f(\mathbf{o}_n) = \mathbf{o}_m$ であるので, $\mathbf{o}_m \in \mathrm{Im}\, f$ である．故に, $\mathrm{Im}\, f \neq \emptyset$ である．

次に $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{Im}\, f$, $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ を任意に取る．この時，$\mathrm{Im}\, f$ の定義から, $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{v}_2 = f(\mathbf{u}_2)$ を満たす $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ が存在する．よって,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1 f(\mathbf{u}_1) + c_2 f(\mathbf{u}_2) = f(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2)$$

であるから, $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Im}\, f$ であることがわかる．以上により, $\mathrm{Im}\, f$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である．□

$\boxed{16}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ を用いて, 線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$$

によって定める．この時, 以下の問いに答えなさい．

(1)　$\mathrm{Ker}\, f$ のひと組の基底と次元を求めよ．

(2)　$\mathrm{Im}\, f$ のひと組の基底と次元を求めよ．

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | \quad A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ であるから, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を解く．

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ①$$

より, $\mathrm{rank}\, A = 2$ である．よって, $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $5 - \mathrm{rank}\, A = 3$ 個の任意定数 c_1, c_2, c_3 を用いて表される．$\mathbf{x} = {}^t(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)$ と成分表示する．$x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$ とおくと, $x_2 = -c_3$, $x_1 = -c_1 - c_2 - c_3$ となるので,

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから, $\mathrm{Ker}\, f$ のひと組の基底として, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる．よって, $\dim \mathrm{Ker}\, f = 3$ である．

(2)　$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ とおく(注 23)と, $\mathrm{Im}\, f = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$ である．① より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立で, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ なので, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ は $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$ を生成する．よって, $\mathrm{Im}\, f$ のひと組の基底として $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が取れる．故に, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ である．□

(注 23) これらは行列 A を構成しているベクトルである．

$\boxed{17}$ 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2-x_3\\ x_2+x_3+x_4\end{pmatrix}$$

によって定める．この時，以下の問いに答えなさい．

(1) Ker f のひと組の基底と次元を求めよ．

(2) Im f のひと組の基底と次元を求めよ．

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ とおくと，

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&-3&-2\\0&1&1&1\end{pmatrix} \qquad ①$$

であるから, rank $A=2$. ゆえに，$4-\mathrm{rank}\,A=2$ 個の任意の定数 c_1,c_2 を用いて，$A\mathbf{x}=\mathbf{o}$ の解は表せる．$x_3=c_1, x_4=c_2$ とおくと，$x_1=3c_1+2c_2$. $x_2=-c_1-c_2$. よって, $A\mathbf{x}=\mathbf{o}$ の解は, $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$. よって, Ker f のひと組の基底として, $\{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ が取れて，$\dim\mathrm{Ker}\,f=2$ であることがわかる．

(2) 像の定義から，$\mathrm{Im}\,f=\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$ である．Im f を生成するベクトルを順に $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ とおくと, ① から $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ は 1 次独立で，$\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ は $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ の 1 次結合として表せることがわかる．ゆえに，Im f のひと組の基底としては, $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\}$ が取れて, $\dim\mathrm{Im}\,f=2$ であることがわかる． □

$\boxed{18}$ $A=\begin{pmatrix}1/3&-2/\sqrt{5}&a\\2/3&1/\sqrt{5}&b\\2/3&0&c\end{pmatrix}$ が直交行列になるように a,b,c を求めよ．

$\boxed{\text{解答例}}$ 直交行列の定義は ${}^tAA=E$ であるから，この等式を具体的に書いてみると，

$$E=\begin{pmatrix}1&0&\frac{a}{3}+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c\\0&1&-\frac{2}{\sqrt{5}}a+\frac{b}{\sqrt{5}}\\\frac{a}{3}+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c&-\frac{2}{\sqrt{5}}a+\frac{b}{\sqrt{5}}&a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}$$

となる．つまり，$\frac{a}{3}+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c=0, -\frac{2}{\sqrt{5}}a+\frac{b}{\sqrt{5}}=0, a^2+b^2+c^2=1$ が成り立つ, これを解くと，$a=\pm\frac{2}{3\sqrt{5}}, b=\pm\frac{4}{3\sqrt{5}}$, $c=\mp\frac{5}{3\sqrt{5}}$ (複号同順) となる． □

$\boxed{19}$ $P=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi&\cos\theta\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi&\cos\theta\sin\varphi&\cos\varphi\\\cos\theta&-\sin\theta&0\end{pmatrix}$ は直交行列であることを示しなさい．

$\boxed{\text{方針}}$ ${}^tPP=E$ であることを確かめればよい (計算は読者にお任せする(注 24))． □

(注 24) この P は実は有名な直交行列の一つです．

$\boxed{20}$ 次のベクトルにグラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を作りなさい.

(1) $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (4) $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{答え}}$(注 25)

(1) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ (2) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

(3) $\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ (4) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$\boxed{21}$ n 次正方行列 A に対して，A の固有値・固有ベクトルの定義を述べよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような複素数 λ のことを A の固有値といい, またこのときのベクトル $\mathbf{x}$ のことを固有値 λ に対する固有ベクトルという. □

$\boxed{22}$(行列の対角化：相異なる（重複度 1 の）固有値のみを持つ場合) 次の行列が対角化可能かどうか判定し，対角化可能な場合は対角化する正則行列 P を求め, また $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -4 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & -2 \\ 14 & -5 & 12 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) まずは固有値を求める(注 26).

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

より，固有値は $\lambda = 1,2,3$ である. A は 3 次正方行列であり，異なる 3 つの固有値を持つので対角化可能である.

次に，各固有値に対する固有ベクトルを求める.

① $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求めるために，連立一次方程式 $\mathbf{o} = (1 \cdot E - A)\mathbf{x}$ を解く.

$$E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(注 25)解き方は教科書 139 ページの例 3.18 を参考にしてください. 教科書と出題の形式が違うのには理由があります. 例えば，140 ページの (3) の場合ですが，V が 3 つのベクトルから生成されているのですが，グラム・シュミットの直交化法は「基底に対して適応するものである」ため，その 3 つのベクトルが V の基底であることを確かめる必要性が出てきてしまいます. 一方，$\boxed{20}$ のような出題形式を取った場合は,「基底であることを認めた上で」グラム・シュミットの直交化法を用いなさい，ということを暗に意味します（基底であるという事は確かめずに前提として問題を解いてよい, ということです. もちろん，問題によっては，基底であることをきちんと確かめてから使う必要があります.）

(注 26)固有値を求めるには固有方程式 $|\lambda E - A| = 0$ を解きます.

より, 連立一次方程式 $\mathbf{o} = (1 \cdot E - A)\mathbf{x}$ の解は, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である (c は任意の定数).

② $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求めるために，連立一次方程式 $\mathbf{o} = (2 \cdot E - A)\mathbf{x}$ を解く.

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 連立一次方程式 $\mathbf{o} = (2 \cdot E - A)\mathbf{x}$ の解は, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である (c は任意の定数).

③ $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを求めるために，連立一次方程式 $\mathbf{o} = (3E - A)\mathbf{x}$ を解く.

$$3E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 連立一次方程式 $\mathbf{o} = (3E - A)\mathbf{x}$ の解は, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である (c は任意の定数).

①,②,③ より, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく(注 27)と, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ である(注 28). □

※　以下，(2)～(6) については答えのみを書きます. やり方は同様なので練習してみてください. まず, (2)～(6) はどれも対角化可能になります. P と $P^{-1}AP$ は次のようになります.

(2)　$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(3)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4)　$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(5)　$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

23 (行列の対角化 : 重複度が 2 以上の固有値がある場合(注 29))　次の行列が対角化可能かどうか判定し，対角化可能な場合は対角化する正則行列 P を求め，また $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

解答例 (1)　まず，$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 2 & 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 2 & 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & 6 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\{(\lambda+2)(\lambda-3)+6\} = \lambda(\lambda-1)^2$ より，A の固有値は $\lambda = 0$(重複度 1), 1(重複度 2) である.

(注 27) P は固有ベクトルを並べたものである.

(注 28) $P^{-1}AP$ は対角成分に固有値を並べてできる対角行列である. 授業中に話したように，固有ベクトルの並べ方と固有値の並べ方の順番はそろえること. そろえなければ答えは正しく作れません.

(注 29) この場合は，対角化可能な場合とそうでない場合があります. それを判定するには**固有空間の次元**と**固有値の重複度**を比較する必要があります. 現れるすべての固有値に対して，固有空間の次元と固有値の重複度が等しければ対角化可能，そうでなければ対角化は不可能，ということになります.

次に各固有値に対する固有空間の次元を求める.

① $\lambda = 1$ について.

$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 は任意の定数) である. よって, $\dim V_1 = 2$ となり, 固有値 1 の重複度と一致する.

② $\lambda = 0$ について.

$-A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $-A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c は任意の定数) である(注 30). よって, $\dim V_0 = 1$ より固有値 0 の重複度と一致する.

①,② より, A は対角化可能であり, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化できる(注 31).

(2) まず, $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3$ より A の固有値は $\lambda = 1$ (3 重根) である.

$E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから,$(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $3 - \mathrm{rank}\,(E-A) = 3 - 2 = 1$ 個の任意の定数 c を用いて, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表される. よって, $\dim V_1 = 1 \neq 3$ (つまり，固有値 1 に対して，固有空間の次元と重複度が一致しない) であるから A は対角化不可能.

(3) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda + \lambda^2 = \lambda\{(\lambda-1)(\lambda-2) - 1 + \lambda\} = \lambda(\lambda-1)^2$ であるから, A の固有値は, $\lambda = 0$(重複度 1), 1(重複度 2) である.

① $\lambda = 1$ について.

$E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c は任意の定数) である. よって, $\dim V_1 = 1 \neq 2$ である(注 32).

従って，A は対角化不可能である(注 33).

※　(4)～(8) については，基本的には (1) と (3) のどちらかとやり方は同じです．というわけで答えだけ書きますので練習をしてみてください.

(4) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化可能

(注 30) $x_3 = 2c$ とおけば, $x_2 = c$, $x_1 = c$ である.

(注 31) ここでも固有ベクトルの並べる順番と固有値を並べる順番はそろえること!

(注 32) この時点でもう固有値の重複度と固有空間の次元が違うものが見つかったので, もうひとつの固有値 $\lambda = 0$ については調べる必要はありません.

(注 33) 残念ながら教科書には書いていないのですが (授業中も触れる時間はありませんでしたが)，重複度 1 の固有値に対しては，固有空間の次元はいつでも 1 になることが知られています. ということは，対角化ができるかできないかという問題は，本質的には重複度が 2 以上の固有値に対して，固有空間の次元と重複度が一致するかどうかを調べさえすればよいという事になります. (3) の問題では重複度 2 の固有値から先に調べていますが，それは重複度 1 の方についてはどうせ固有空間の次元と重複度が一致するんだから対角化可能かどうかという問題を考えるときには調べる必要がない，と思っているからです. もちろん，対角化するための正則行列 P を求めるためには重複度 1 の固有値についても固有空間の基底を探す必要がありますが.

(5) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と対角化可能

(6) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化可能

(7), (8) はともに対角化不可能 □

$\boxed{24}$ 3 次正方行列 A が対角化が可能であり，重複度 3 の固有値を持つとき，

$$A = cE \qquad (c \text{ は定数}, E \text{ は}3\text{次の単位行列})$$

の形に限ることを証明せよ[注 34].

解答例 A の固有値を λ_1(重複度3) とおく. A は対角化可能であるから, ある正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 E$ と対角化ができる. この式に左から P, 右から P^{-1} を掛けると，$A = P\lambda_1 EP^{-1} = \lambda_1 E$ となる. $c = \lambda_1$ とすれば, $A = cE$ となることがわかる. □

$\boxed{25}$ (実対称行列の対角化[注 35]) 次の実対称行列を対角化する<u>直交行列</u> P および ${}^tPAP$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 17 \end{pmatrix}$

解答例 (1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda-1 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5\lambda+4) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-4)$ より A の固有値は $\lambda = -1, 1, 4$ である. 次に各固有値に対する固有空間の基底をなす固有ベクトル求める.

① $\lambda = -1$ について.

$-E - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $(-E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c は任意の定数). これにグラム・シュミットの直交化法を施すと, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる.

[注 34] 3 次正方行列が重複度 3 の固有値を持てば，単位行列の定数倍になっているもの以外には対角化できるものはありません，ということなのですが，このことからも $\boxed{23}$ (2) は，重複度 3 の固有値を持つけれど単位行列の定数倍になってないから対角化はできません，というように答えることもできます. この理由から，重複度 3 の固有値を持つような 3 次正方行列を対角化する問題は出てこないわけです（単位行列の定数倍以外にそういうものはなく, それはすでに対角化されているわけですから）.

[注 35] まず大前提として，

① **実対称行列は必ず対角化可能である**

ということを知っている必要があります. この事実があるので，実対称行列に対してはもう「対角化可能であるか判定する」という手順は踏まなくてもいいことになります.

② **実対称行列は直交行列 P を使って, ${}^tPAP$ が対角行列になるようにできる**

ということを知っている必要があります. (別に直交行列を使わずにいままで通り $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにできるのですが, 直交行列だと ${}^tP = P^{-1}$ が成り立つので逆行列が簡単に求められるので，この問題のように直交行列を使って対角化せよ，と問題を指定してくることが多々あります. その場合，P は正則行列であるだけではダメです. 直交行列になっている (つまり $P^{-1} = {}^tP$ を満たしている) 必要があります.)

② $\lambda = 1$ について．$(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を解くと, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. これにグラム・シュミットの直交化法を施すと, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る．

③ $\lambda = 4$ について．$(4E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を解くと, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. これにグラム・シュミットの直交化法を施すと, $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．よって, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

(2)[注 36] $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$ より, A の固有値は $\lambda = 1$(重複度 2), 4(重複度 1) である．

① $\lambda = 4$ について

$4E - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $(4E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である (c は任意の定数). ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ にグラム・シュミットの直交化法を施すと，$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．

② $\lambda = 1$ について．

$E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解は $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である[注 37] (c_1, c_2 は任意の定数). $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ にグラム・シュミットの直交化法を施す[注 38].

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ とおいて正規化すると $\mathbf{b}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る．

[注 36] この問題の場合は，重複度が 2 の固有値が出現するので (1) とは若干やり方に違いがあります（本質的には，固有空間ごとにグラム・シュミットの直交化法を使う，という意味で同じなのですが….）. 注意してください．

[注 37] これは $x_2 = c_1, x_3 = c_2$ とおいたものであるが，$x_1 = c_1, x_2 = c_2$ とおいてもよい．その場合は, $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が解となる．その場合, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ にグラム・シュミットの直交化法を施せばよい．得られる直交行列 P は変わるが，その P を用いて対角化できることには変わりはない．条件を満たす P は 1 通りには定まらないが，ひとつ正しく求められていれば正解，ということである．

[注 38] $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ を「ただ正規化するだけ」ではだめです．実際,「ただ正規化しただけ」の $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は直交していません（内積を取って 0 になってないのが確認できると思います.）(1) のやりかただけ覚えているとこういう計算をしてしまうかもしれないので注意してください．

$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}'_1)\mathbf{b}'_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としてこれを正規化すると, $\mathbf{b}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る.

従って, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化される.

(3) 以降は, (1), (2) のどちらかの計算方法と同じですので答えのみを書きます. ただし，P のとり方は 1 通りではありませんので，同じ答えでなくても計算のやり方に間違いがなければ正解ですので，その点には注意をしてください.

(3) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(6) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(7) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(8) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{105}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{105}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.