演習問題 No.1

担当：新國裕昭

1．多変数関数の微分学（偏微分）

1.1　2 変数関数の極限・連続性

教科書 p. 111〜p. 113 の例題 1, 問 4, 例題 2, 問 5 を解いた上で，さらに以下の問いに答えよ.

問題 1.1.1. 関数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ を考える.

(1)　直線 $y=mx$ に沿って点 (x,y) を点 $(0,0)$ に近づけた時の $f(x,y)$ の極限を求めよ. ここで， m は定数とする.

(2)　放物線 $y=ax^2$ に沿って点 (x,y) を点 $(0,0)$ に近づけた時の $f(x,y)$ の極限を求めよ. ここで，a は定数とする.

(3)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在するか否かを判定せよ.

問題 1.1.2. $(x,y)\to(0,0)$ のとき，次の 2 変数関数の極限を求めよ.

(1)　$f(x,y)=\dfrac{ax^2+by^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　ここで, $a\neq 0$, $b\neq 0$ とする.

(2)　$f(x,y)=\dfrac{x^4+x^2y^2+y^3}{x^2+y^2}$

問題 1.1.3. 次の関数は点 $(0,0)$ で連続か否か判定せよ.

(1)　$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \text{ の時,}\\ 1 & (x,y)=(0,0) \text{ の時.}\end{cases}$

(2)　$f(x,y)=\begin{cases}xy\log(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \text{ の時,}\\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ の時.}\end{cases}$　(ヒント：　ロピタルの定理を用いよ.)

問題 1.1.4.　次の関数が原点で連続であることを示しなさい.

(1)　$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ の時,}\\ 0 & (x,y)=0 \text{ の時.}\end{cases}$

(2)　$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ の時,}\\ 0 & (x,y)=0 \text{ の時.}\end{cases}$

問題 1.1.1 の誤答例　$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと，$(x,y)\to(0,0)\iff r\to 0$ である.

$$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\to 0\quad(r\to 0)$$

という計算は間違いである (θ は x と y の関数なので, 極限を取る際に θ の動きを気にする必要があるが, この計算は θ がまるで定数であるかのように取り扱っている.). この式が必ずしも成立しない例は (2) で挙げられる.

$$|f(x,y)|\leq h(r)$$

となる θ に無関係な関数 $h(r)$ が作れて，$h(r)\to 0\quad(r\to 0)$ を満たす時に，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ を証明した事になる.

◇◇◇問題の解答例◇◇◇

問題 1.1.1 の解答例　(1) $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \dfrac{mx}{x^2+m^2} \to \dfrac{0}{m^2} = 0 \quad (x \to 0)$ より，直線 $y = mx$ に沿って点 (x,y) を原点に近づけた時の極限は 0 である.

(2)

$$f(x,ax^2) = \frac{ax^4}{x^4+a^2x^4} = \frac{a}{1+a^2}$$

より，放物線 $y = ax^2$ に沿って点 (x,y) を原点に近づけた時の極限は $\frac{a}{1+a^2}$ である.

(3) $\boxed{\text{解答例 1}}$ (1), (2) より直線に沿って点 (x,y) を原点に近づける場合と放物線に沿って点 (x,y) を原点に近づける場合では値が異なる. 従って，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

$\boxed{\text{解答例 2}}$ (2) より，放物線 $y = ax^2$ に沿って点 (x,y) を原点に近づけた場合の極限は，$\frac{a}{1+a^2}$ である. これは，a の値に依存する（a の値が変化すれば変化する値である）ので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

問題 1.1.2 の解答例　(1)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおけば，$(x,y) \to (0,0)$ のとき，$r \to 0$ である. $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = ar\cos^2\theta + br\sin^2\theta$ より，

$$0 \le |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le r|a\cos^2\theta| + r|b\sin^2\theta| \le r(|a|+|b|) \to 0 \qquad (r \to 0).$$

よって, はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在し，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である.

(2)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおけば，$(x,y) \to (0,0)$ のとき，$r \to 0$ である.

$$0 \le |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta\cos^2\theta + r\sin^3\theta| \le 2r^2 + r \to 0 \quad (r \to 0)$$

であるから, はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在し，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ であることがわかる.

問題 1.1.3 の解答例　(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r} = r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

より，

$$0 \le |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos^2\theta\sin\theta| \le r^2 \to 0 \quad (r \to 0)$$

である. 故に，はさみうちの原理により，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \ne 1 = f(0,0)$$

となるので，関数 $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続ではない.

(2)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta\log r^2$ と表される. よって，

$$0 \le |f(x,y)| = |r^2\cos\theta\sin\theta\log r^2| \le |r^2\log r^2|$$

ロピタルの定理より ($'$ は r での微分を表すものとする)，

$$\lim_{r\to0} r^2\log r^2 = \lim_{r\to0}\frac{\log r^2}{\frac{1}{r^2}} = \lim_{r\to0}\frac{(\log r^2)'}{(\frac{1}{r^2})'} = \lim_{r\to0}\frac{\frac{1}{r^2}\cdot 2r}{-2r^{-3}} = \lim_{r\to0}(-r^2) \to 0 \qquad (r \to 0).$$

従って，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ となるので，関数 $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続である.

問題 1.1.4 の解答例　(1)　$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos\theta\sin\theta\cos 2\theta| \le r^2 \to 0 \quad (r \to 0)$ より，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ である. よって, $f(x,y)$ は原点において連続である.

(2)　$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |\frac{r^2\cos^2\theta}{r+r^2}| = |\frac{r\cos^2\theta}{1+r}| \le \frac{r}{1+r} \to 0 \quad (r \to 0)$ より，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ である. よって, $f(x,y)$ は原点において連続である.

演習問題 No.2

担当：新國裕昭

1.2 偏微分係数・偏導関数

教科書 p.115〜p. 117 の問 6, 7, 8，例題 3, 問 9 を解いた上で，さらに以下の問題に答えよ.

問題 1.2.1. 関数 $z = e^x(\sin \pi y + \cos \pi y)$ の偏導関数を求めよ.

問題 1.2.2. 関数 $f(x, y) = 3x^4 + 5xy - xy^2 - y^3$ の第 2 次偏導関数を求めよ.

関数 $f(x, y)$ に対して, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ と書き，Δ はラプラシアンと呼ぶ. また，$\Delta f = 0$ を満たす関数 $f(x, y)$ のことを調和関数と呼ぶ.

問題 1.2.3. 次の関数 $f(x, y)$ は調和関数であることを示せ.

(1) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ (但し，$(x, y) \neq (0, 0)$ とする.)

(2) $f(x, y) = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ (但し，$x \neq 0$ とする.)

問題 1.2.4. 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ は点 $(0, 0)$ で偏微分可能ではないことを示せ.

問題 1.2.5. 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ の時,} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ の時} \end{cases}$ を考える.

(1) $f(x, y)$ は原点で連続か否か調べよ.

(2) $f(x, y)$ は原点で偏微分可能か否か調べよ.

問題 1.2.6. 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

について $f_{xy}(x, y)$ は原点で不連続であることを示しなさい.

問題 1.2.7. *3* 変数関数 $u = f(x, y, z)$ に対するラプラシアンは, u が 2 回偏微分可能であるとき,

$$\Delta u = f_{xx}(x, y, z) + f_{yy}(x, y, z) + f_{zz}(x, y, z)$$

で定義する. *2* 変数の場合と同様に, $\Delta u = 0$ を満たす時, u を調和関数であるという.

$$u = f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

が調和関数であることを示しなさい.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 1.2.1 の解答例　$z_x = e^x(\sin\pi y + \cos\pi y), \quad z_y = \pi e^x(\cos\pi y - \sin\pi y).$ □

問題 1.2.2 の解答例　$f_x(x,y) = 12x^3 + 5y - y^2,\ f_y(x,y) = 5x - 2xy - 3y^2$ より，$f_{xx}(x,y) = 36x^2,\ f_{xy}(x,y) = 5 - 2y,\ f_{yx}(x,y) = 5 - 2y,\ f_{yy}(x,y) = -2x - 6y.$ □

問題 1.2.3 の解答例　(1)　$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ をさらに $x,\ y$ でそれぞれ偏微分して，$f_{xx}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad f_{yy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. よって，$\Delta f = 0$ を満たすので，$f(x,y)$ は調和関数である.

(2)　$f_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2},\ f_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ をさらに $x,\ y$ で偏微分して，$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad f_{yy}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. よって，$\Delta f = 0$ を満たすので，$f(x,y)$ は調和関数である. □

問題 1.2.4 の解答例　偏微分係数の定義より，

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(|h| - 1) - (-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(|h| - 1) - (-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

どちらも $h \to +0$ のときと $h \to -0$ のときに値が異なるから $f_x(0,0)$ も $f_y(0,0)$ も存在しない. 故に, $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で偏微分可能ではない. □

問題 1.2.5 の解答例　(1)　直線 $y = x$ に沿って点 (x,y) を原点に近づけると, $f(x,x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$ に近づく. 一方, 直線 $y = 2x$ に沿って点 (x,y) を原点に近づけると, $f(x,2x) = \frac{4x^2}{5x^2} = \frac{4}{5}$ に近づく. したがって, (x,y) が原点に近づく経路として $f(x,y)$ の値が異なる値に近づく 2 通りのものが見つかるので $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ も成り立たないので, $f(x,y)$ は原点で不連続である.

(2)　偏微分の定義より,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

となるので, $f(x,y)$ は原点で偏微分可能である.

問題 1.2.6 の略解 $f_x(x,y) = 2x\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ をさらに y で偏微分して,

$$f_{xy}(x,y) = 2x\frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

を得る. m を任意の定数とし, 直線 $y = mx$ に沿って $f(x,y)$ を原点に近づけると,

$$\lim_{x\to 0} f_{xy}(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4 + 3m^2x^4}{(x^2 + m^2x^2)^2} = \frac{1 + 3m^2}{(1+m^2)^2}$$

を得る. この値は m によって異なるので，極限値は存在しない. 従って, $f_{xy}(x,y)$ は原点において不連続である. □

問題 1.2.7 の解答例

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

より,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

である. 同様にして,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{z^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

を得る. これらを加えると, $\Delta u = 0$ を得る. 従って, u は調和関数である. □

演習問題 No.3

担当：新國裕昭

1.3 全微分

教科書 120 ページの例題 4, 123 ページの例 13, 問 14, 15, 127 ページの例題 5, 問 17 を解いた上でさらに以下の問題に答えなさい.

問題 1.3.1. 関数 $f(x,y) = \log(1 + xy + x^2)$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x,y)$ は原点で連続であるか否か調べよ.

(2) $f(x,y)$ は原点で偏微分可能であるか否か調べよ.

(3) $f(x,y)$ は原点で全微分可能か否か調べよ.

問題 1.3.2. 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}), \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

は原点で全微分可能か否か調べなさい.

問題 1.3.3. 次の関数の全微分を求めよ.

(1) $z = e^{x^2+y^2}$

(2) $z = \sin\log(x^2 + y^2)$

(3) $z = x^y$

問題 1.3.4. $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ のグラフ上の点 $(1,1,2)$ における接平面の方程式および法線の方程式を求めよ.

問題 1.3.5. *3* 辺の長さが 5 : 12 : 13 の直角三角形を考える. 直角を挟む *2* 辺の長さを 1/10 だけ伸ばしたとき, 斜辺の増加量を全微分を用いて計算せよ.

問題 1.3.6. 問題 *1.2.5* の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ の時}, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ の時} \end{cases}$$

は原点で全微分可能か否か調べよ. (「全微分可能ならば連続である」という定理を用いよ.)

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 1.3.1 の解答例 (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ であるから, $f(x,y)$ は原点で連続である.

(2) $\displaystyle f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} h\log(1+h^2)^{\frac{1}{h^2}} = 0\cdot 1 = 0$ ($\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ より), $\displaystyle f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$ であるから， $f(x,y)$ は原点で偏微分可能である.

(3) $\epsilon(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k$ とおく[1]. まず, (2) で求めたものを代入して, $\epsilon(h,k) = \log(1+hk+h^2)$ となる. $h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと, $\frac{\epsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\log(1+r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\cos^2\theta)}{r}$ である. 対数関数の中身について $1-r^2 \le 1+r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\cos^2\theta \le 1+2r^2$ となるので, $\frac{\log(1-r^2)}{r} \le \frac{\epsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{\log(1+2r^2)}{r}$. $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\log(1-r^2)}{r} = \lim_{r\to 0}(-r)\log(1-r^2)^{-\frac{1}{r^2}} = 0\cdot 1 = 0$ および $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\log(1+2r^2)}{r} = \lim_{r\to 0} 2r\cdot\log(1+2r^2)^{\frac{1}{2r^2}} = 0\cdot 1 = 0$ なので，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ となる. 故に, $f(x,y)$ は原点で全微分可能である. □

問題 1.3.2 の解答例 まず, $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$ である. $\epsilon(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k$ とおくと, $\epsilon(h,k) = hk^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+2k^2}}$ である. $h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと,

$$\left|\frac{\epsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta\sin\frac{1}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta}}}{r}\right| \le r^2 \to 0 \quad (r\to 0)$$

となるので, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ となる. 故に, $f(x,y)$ は原点で全微分可能である. □

問題 1.3.3 の解答例 (1) $f_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2}, f_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2}$ より,

$$dz = 2xe^{x^2+y^2}dx + 2ye^{x^2+y^2}dy.$$

(2) $\displaystyle z_x = \frac{2x\cos\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad z_y = \frac{2y\cos\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ より,

$$dz = \frac{2x\cos\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dx + \frac{2y\cos\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dy.$$

(3) $z_x = yx^{y-1}, \quad z_y = x^y\log x$ より, $dz = yx^{y-1}dx + x^y\log x dy$. □

問題 1.3.4 の解答例 $f_x(1,1) = 2, f_y(1,1) = 2$ より，接平面の方程式は $z-2 = 2(x-1)+2(y-1)$, 法線の方程式は, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ である.

問題 1.3.5 の解答例 斜辺の長さを z, 他の 2 辺の長さを x, y とすれば, 三平方の定理より $z = \sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つ.

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

より,

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

$x = 5, y = 12, dx = 1/10, dy = 1/10$ を代入すると,

$$dz = \frac{5}{13}\times\frac{1}{10} + \frac{12}{13}\times\frac{1}{10} = \frac{17}{130}.$$

よって, およそ $17/130 (= 0.1307\cdots)$ 増加する. □

問題 1.3.6 の解答例 問題 1.2.5 (1) より, $f(x,y)$ は原点で連続ではない. 全微分可能な関数は連続であるから, 原点で連続でない $f(x,y)$ は原点で全微分可能にはならない. □

---

[1] $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が確かめられれば, $f(x,y)$ は原点で全微分可能であるといえる.

演習問題 No.4

担当：新國裕昭

1.4 合成関数の（偏）微分計算

教科書の問 19(p.129), 例 15, 問 20, 問 21(p.130) を解いた上でさらに以下の問題に答えなさい. (解答は計算ミスを含んでいないかのチェックを行っていないので各自でチェックすること.)

問題 1.4.1. $z = f(x, y) = x^3 + 3xy + \log y,\ x = t^2,\ y = t^3$ の時，連鎖律（*Chain Rule*）を用いて $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

問題 1.4.2. $z = e^{x+y},\ x = \tan uv,\ y = \sqrt{u^2 + v^2}$ の時，$\frac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

問題 1.4.3. $z = f(x, y)$ を C^2 級関数とする．また, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする．このとき, z_{xx} を $r, \theta, z_r, z_\theta, z_{rr}, z_{r\theta}, z_{\theta\theta}$ を用いて表せ.

問題 1.4.4. $z = f(x, y)$ を C^2 級関数とする. また，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする.

(1) z_{yy} を $r, \theta, z_r, z_\theta, z_{rr}, z_{r\theta}, z_{\theta\theta}$ を用いて表せ.

(2) $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ とする. この時，次の公式を示せ.

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

問題 1.4.5. (**3 次元極座標のヤコビアン**) *3* 次元極座標

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

を考える. r, θ, ϕ の動く範囲は，$r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ とする. この時,

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}\right|$$

を求めよ. ここで，右辺の $|\cdot|$ は絶対値を表す.

問題 1.4.6. α は定数とし, $z = f(x, y)$ が全微分可能な関数で， $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ であるとき,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

が成り立つ事を示しなさい.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 1.4.1 の解答例

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(3x^2+3y)\cdot 2t+\left(3x+\frac{1}{y}\right)\cdot 3t^2\\ &= (3t^4+3t^3)\cdot 2t+\left(3t^2+\frac{1}{t^3}\right)\cdot 3t^2=6t^5+6t^4+9t^4+\frac{3}{t}=6t^5+15t^4+\frac{3}{t}.\end{aligned}$$

問題 1.4.2 の解答例　連鎖律を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= e^{x+y}\frac{u}{\cos^2 uv}+e^{x+y}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=e^{\tan uv+\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{u}{\cos^2 uv}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right).\end{aligned}$$

□

問題 1.4.3 の解答例　連鎖律より,

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=z_r r_x+z_\theta\theta_x.$$

さらに連鎖律を用いて,

$$\begin{aligned}z_{xx} &= z_{rx}r_x+z_r r_{xx}+z_{\theta x}\theta_x+z_\theta\theta_{xx}\\ &= (z_{rr}r_x+z_{r\theta}\theta_x)r_x+z_r r_{xx}+(z_{\theta r}r_x+z_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x+z_\theta\theta_{xx}\\ &= z_{rr}(r_x)^2+2z_{r\theta}\theta_x r_x+z_{\theta\theta}(\theta_x)^2+z_r r_{xx}+z_\theta\theta_{xx}. \qquad (1.1)\end{aligned}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ であるから,

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta,\qquad \theta_x=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r}.$$

$$r_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{r}-\frac{r^2\cos^2\theta}{r^3}=\frac{\sin^2\theta}{r},$$

$$\theta_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{r^4}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

これらを (1.1) に代入すると,

$$z_{xx}=z_{rr}\cos^2\theta+\frac{z_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2}-\frac{2z_{r\theta}}{r}\sin\theta\cos\theta+\frac{z_r\sin^2\theta}{r}+\frac{2z_\theta}{r^2}\sin\theta\cos\theta.$$

□

問題 1.4.4 の解答例　(1)　連鎖律を用いて, $z_y=z_r r_y+z_\theta\theta_y$. さらに連鎖律を用いて,

$$\begin{aligned}z_{yy} &= z_{ry}r_y+z_r r_{yy}+z_{\theta y}\theta_y+z_\theta\theta_{yy}\\ &= (z_{rr}r_y+z_{r\theta}\theta_y)r_y+z_r r_{yy}+(z_{\theta r}r_y+z_{\theta\theta}\theta_y)\theta_y+z_\theta\theta_{yy}\\ &= z_{rr}(r_y)^2+2z_{r\theta}\theta_y r_y+z_{\theta\theta}(\theta_y)^2+z_r r_{yy}+z_\theta\theta_{yy}. \qquad (1.2)\end{aligned}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ であるから,

$$r_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\theta,\quad \theta_y=\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

さらに，これらを y で偏微分すると，

$$r_{yy} = \frac{\cos^2\theta}{r}, \quad \theta_{yy} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

を得る. これらを (1.2) に代入すると, 次の式が得られる.

$$z_{yy} = z_{rr}\sin^2\theta + z_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + z_{r\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} + z_r\frac{\cos^2\theta}{r} - z_\theta\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

(2) 問題 1.4.3 より，

$$z_{xx} = z_{rr}\cos^2\theta + z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - z_{r\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} + z_r\frac{\sin^2\theta}{r} + z_\theta\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

これと (1) の結果を合わせて，

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

を得る. □

問題 1.4.5 の解答例　(3 × 3 の行列式はサラスの公式を使って計算する事ができます.)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| &= \left|\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= |r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi| \\
&= r^2|\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta| \\
&= r^2|\sin\theta|
\end{aligned}$$

$0 \le \theta \le \pi$ より $\sin\theta \ge 0$. よって, $|\sin\theta| = \sin\theta$ である. 従って, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| = r^2\sin\theta$ を得る. □

問題 1.4.6 の解答例　連鎖律より，

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}(-\sin\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\alpha + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\alpha \\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\alpha - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\alpha \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

演習問題 No.5

担当：新國裕昭

1.5　テイラーの定理・マクローリンの定理

問題 1.5.1.　マクローリンの定理の仮定を満たす関数 $f(x, y)$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　剰余項を含めて *1* 次の項までの $f(x, y)$ のマクローリン展開の式を書きなさい.

(2)　剰余項を含めて *3* 次の項までの $f(x, y)$ のマクローリン展開の式を書きなさい.

問題 1.5.2.　関数 $f(x, y) = e^x \log(1 + y)$ を考える.

(1)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *1* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

(2)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *2* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

(3)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *3* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

問題 1.5.3.　関数 $f(x, y) = \sin(x + y)$ を考える.

(1)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *1* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

(2)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *2* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

(3)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *3* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

(4)　$f(x, y)$ の剰余項を含めて *4* 次の項までのマクローリン展開を求めよ.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 **1.5.1** の解答例　(1)　マクローリンの定理より, ある $\theta_1 \in (0,1)$ が存在して,

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(\theta_1 x, \theta_1 y) + yf_y(\theta_1 x, \theta_1 y)$$

が成り立つ.

(2)　マクローリンの定理より, ある $\theta_3 \in (0,1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx}(\theta_3 x, \theta_3 y) + 3x^2 y f_{xxy}(\theta_3 x, \theta_3 y) + 3xy^2 f_{xyy}(\theta_3 x, \theta_3 y) + y^3 f_{yyy}(\theta_3 x, \theta_3 y)) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

問題 **1.5.2** の解答例　(1)　$f_x(x,y) = e^x \log(1+y)$, $f_y(x,y) = \frac{e^x}{1+y}$ を前問の (1) で得た式に代入すると,

$$f(x,y) = xe^{\theta_1 x}\log(1+\theta_1 y) + y\frac{e^{\theta_1 x}}{1+\theta_1 y} \qquad (0 < \theta_1 < 1).$$

(2)　マクローリンの定理より, ある $\theta_2 \in (0,1)$ が存在して,

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx}(\theta_2 x, \theta_2 y) + 2xyf_{xy}(\theta_2 x, \theta_2 y) + y^2 f_{yy}(\theta_2 x, \theta_2 y))$$

が成り立つ. $f_{xx}(x,y) = e^x \log(1+y)$, $f_{xy} = \frac{e^x}{1+y}$, $f_{yy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}$ より,

$$f(x,y) = y + \frac{1}{2}\left(x^2 e^{\theta_2 x}\log(1+\theta_2 y) + 2xy\frac{e^{\theta_2 x}}{1+\theta_2 y} - y^2\frac{e^{\theta_2 x}}{(1+\theta_2 y)^2}\right) \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

(3)

$$f_{xxx}(x,y) = e^x \log(1+y), \qquad f_{xxy}(x,y) = \frac{e^x}{1+y}, \qquad f_{xyy}(x,y) = -\frac{e^x}{(1+y^2)}, \qquad f_{yyy}(x,y) = \frac{2e^x}{(1+y)^3}$$

を前問の (2) で得た式に代入すると,

$$f(x,y) = y + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{6}\left(x^3 e^{\theta_3 x}\log(1+\theta_3 y) + 3x^2 y\frac{e^{\theta_3 x}}{1+\theta_3 y} - 3xy^2\frac{e^{\theta_3 x}}{(1+\theta_3 y)^2} + y^3\frac{2e^{\theta_3 x}}{(1+\theta_3 y)^3}\right) \qquad (0 < \theta_3 < 1).$$

□

問題 **1.5.3** の解答例　(1) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = \cos(x+y)$ より,

$$f(x,y) = x\cos\theta_1(x+y) + y\cos\theta_1(x+y), \qquad (0 < \theta_1 < 1).$$

(2)　$f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -\sin(x+y)$ より,

$$f(x,y) = x + y - \frac{1}{2!}(x+y)^2 \sin\theta_2(x+y) \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

(3)　$f_{xxx}(x,y) = f_{xxy}(x,y) = f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = -\cos(x+y)$ より,

$$f(x,y) = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 \cos\theta_3(x+y) \qquad (0 < \theta_3 < 1).$$

(4)　$f_{xxxx}(x,y) = f_{xxxy}(x,y) = f_{xxyy}(x,y) = f_{xyyy}(x,y) = f_{yyyy}(x,y) = \sin(x+y)$ より,

$$f(x,y) = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{4!}(x+y)^4 \sin\theta_4(x+y) \qquad (0 < \theta_4 < 1).$$

□

演習問題 No.6

担当：新國裕昭

1.6　2 変数関数の極値問題

問題 1.6.1.　$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ の極値を求めよ.

問題 1.6.2.　$f(x, y) = x^4 - xy + y^4$ の極値を求めよ.

問題 1.6.3.　$f(x, y) = x^2 + y^2 + y^3$ の極値を求めよ.

問題 1.6.4.　$f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ の極値を求めよ.

問題 1.6.5.　$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(\pi x^2 + ey^2)$ の極値を求めよ.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 1.6.1 の解答例　連立方程式

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) = 2x + y - 4 \qquad (1) \\ 0 &= f_y(x,y) = x + 2y - 2 \qquad (2) \end{aligned}$$

の解が $f(x,y)$ の極値をとる点の候補である. (1) − (2) × 2 より, $y = 0$, $x = 2$ を得る. よって, 極値の候補の点は $(2,0)$ である. $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yx}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 2$ より $D(2,0) = -3 < 0$, $f_{xx}(2,0) = 2 > 0$. 従って, $f(x,y)$ は点 $(2,0)$ において極小値 $f(2,0) = -4$ を取る. □

問題 1.6.2 の解答例　連立方程式

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) = 4x^3 - y \qquad (1) \\ 0 &= f_y(x,y) = -x + 4y^3 \qquad (2) \end{aligned}$$

の解が $f(x,y)$ の極値の候補の点である. (1) より, $y = 4x^3$. これを (2) に代入すると,

$$0 = x - 256x^9 = x(1 + 2^4x^4)(1 + 2^2x^2)(1 + 2x)(1 - 2x).$$

これを解くと, $x = 0, \pm\frac{1}{2}$. よって, 極値をとる点の候補は $(x,y) = (0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ である.

$f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$ より, $D(x,y) = 1 - 144x^2y^2$.

$D(0,0) = 1$ より原点では極値を持たない. $D(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) = -8 < 0$, $f_{xx}(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) = 3 > 0$ より, 2 点 $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ において極小値 $-\frac{1}{8}$ をとる. □

問題 1.6.3 の解答例　極値をとる点の候補の点 (x,y) は方程式 $0 = f_x(x,y) = 2x$, $0 = f_y(x,y) = 2y + 3y^2 = 3y(y + \frac{2}{3})$ を満たす. これを解くと, $(x,y) = (0,0), (0, -\frac{2}{3})$ を得る. $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy} = 2 + 6y$ より, $D(x,y) = -4(1 + 3y)$. $D(0, -\frac{2}{3}) = 4 > 0$ より, 点 $(0, -\frac{2}{3})$ では極値をとらない. $D(0,0) = -4 < 0$, $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ より, 原点において極小値 0 をとる. □

問題 1.6.4 の解答例　極値をとる点の候補の点 (x,y) は, $0 = f_x(x,y) = 4x^3 - 4y$, $0 = f_y(x,y) = -4x + 4y$ を見たす. これを解くと, 極値をとる点の候補は $(x,y) = (0,0), (1,1), (-1,-1)$ の 3 点である事がわかる. また, $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = -4$, $f_{yy}(x,y) = 4$ であるから, 極値の判別式は $D(x,y) = 16 - 48x^2$ である.

$D(0,0) = 16 > 0$ より, 原点では極値をとらない. $D(\pm1, \pm1) = -32 < 0$, $f_{xx}(\pm1, \pm1) = 12 > 0$ より, 2 点 $(\pm1, \pm1)$ において極小値 -1 をとる. □

問題 1.6.5 の解答例　極値をとる点の候補の点は, 連立方程式 $0 = f_x(x,y) = 2xe^{-x^2-y^2}(\pi - \pi x^2 - ey^2)$, $0 = f_y(x,y) = 2ye^{-x^2-y^2}(e - \pi x^2 - ey^2)$ を満たす. これを解くと, $(x,y) = (0,0), (0,\pm1), (\pm1, 0)$ の 5 点が極値をとる点の候補であることがわかる. また,

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -4x^2e^{-x^2-y^2}(\pi - \pi x^2 - ey^2) + 2e^{-x^2-y^2}(\pi - 3\pi x^2 - ey^2), \\ f_{xy}(x,y) &= -4xye^{-x^2-y^2}(\pi - \pi x^2 - ey^2) - 4exye^{-x^2-y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= -4y^2e^{-x^2-y^2}(e - \pi x^2 - ey^2) + 2e^{-x^2-y^2}(e - \pi x^2 - 3ey^2). \end{aligned}$$

$D(0,0) = -4\pi e < 0$, $f_{xx}(0,0) = 2\pi > 0$ より原点で極小値 $f(0,0) = 0$ をとる.

$D(0,\pm1) = 8(\pi - e)e^{-1} > 0$ より 2 点 $(0,\pm1)$ では極値をとらない.

$D(\pm1, 0) = 8\pi(e - \pi)e^{-2} < 0$, $f_{xx}(\pm1, 0) = -4\pi e^{-1} < 0$ より, 2 点 $(\pm1, 0)$ で極大値 π/e をとる. □

演習問題 No.7

担当：新國裕昭

1.7 陰関数の定理・条件付き極値問題

例題 1.7.1. $\boxed{1}$ 束縛条件 $g(x,y)=2x^2+3y^2-1=0$ のもとで, 2 変数関数 $f(x,y)=x+y$ の極値をとる点の候補を求めよ.
$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で求めた極値をとる点の候補が実際に極値をとる点かどうか判定せよ.

例題 1.7.1 の解答例 $\boxed{1}$ $g_x(x,y)=4x$, $g_y(x,y)=6y$ より, $(g_x(x,y),g_y(x,y))=(0,0)$ となる点は $(x,y)=(0,0)$. これは束縛条件に反する. 従って, 束縛条件 $g(x,y)=0$ のもとでは, $(g_x(x,y),g_y(x,y))\neq(0,0)$ である. よって, ラグランジュの未定乗数法の仮定は満たされる. よって，次の方程式の解 (x,y) が極値を取る点の候補となる:

$$0 = f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)=1-4\lambda x \qquad (1)$$
$$0 = f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)=1-6\lambda y \qquad (2)$$
$$0 = g(x,y)=2x^2+3y^2-1 \qquad (3)$$

(1) より, $\lambda\neq 0$ である. (1), (2) より, $x=\frac{1}{4\lambda}$, $y=\frac{1}{6\lambda}$ を得る. これらを (3) に代入すると,

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2+3\left(\frac{1}{6\lambda}\right)^2=1$$

を得る. これを解くと, $\lambda^2=\frac{5}{24}$ より, $\lambda=\pm\sqrt{\frac{5}{24}}$.

$\lambda=\sqrt{\frac{5}{24}}$ のとき, $x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{24}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$, $y=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$. また, $\lambda=-\sqrt{\frac{5}{24}}$ のとき, $x=-\frac{\sqrt{30}}{10}$, $y=-\frac{\sqrt{30}}{15}$. 以上により, 極値をとる点の候補は, $(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{10},\pm\frac{\sqrt{30}}{15}\right)$ である.

$\boxed{2}$ 点 $(\frac{\sqrt{30}}{10},\frac{\sqrt{30}}{15})$ が極値を与える点かどうかを判定する.

$g_y(x,y)=6y$, $g_y(\frac{\sqrt{30}}{10},\frac{\sqrt{30}}{15})=6\times\frac{\sqrt{30}}{15}\neq 0$ より $g(x,y)=0$ の点 $(\frac{\sqrt{30}}{10},\frac{\sqrt{30}}{15})$ の近くで定義された陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する.

$\varphi(x)$ は $f(x,\varphi(x))=0$, すなわち, $2x^2+3(\varphi(x))-2-1=0$ を満たす. 両辺を x で微分すると,

$$4x+6\varphi'(x)\varphi(x)=0 \qquad (1)$$

さらに両辺を x で微分すると,

$$4+6\varphi''(x)\varphi(x)+6(\varphi'(x))^2=0 \qquad (2).$$

$x=\frac{\sqrt{30}}{10}$ のとき $y=\frac{\sqrt{30}}{15}$ より, $\varphi(\frac{\sqrt{30}}{10})=\frac{\sqrt{30}}{15}$. (1) に $x=\frac{\sqrt{30}}{10}$ を代入すると, $\frac{2\sqrt{30}}{5}+6\varphi'(\frac{\sqrt{30}}{10})\frac{\sqrt{30}}{15}=0$ より, $\varphi'(\frac{\sqrt{30}}{10})=-1$. (2) に $x=\frac{\sqrt{30}}{10}$ を代入すると, $4+6\varphi''(\frac{\sqrt{30}}{10})\frac{\sqrt{30}}{15}+6(-1)^2=0$ より, $\varphi''(\frac{\sqrt{30}}{10})=-\frac{5}{6}\sqrt{30}$.

$p(x)=f(x,\varphi(x))$ とおくと, $p(x)=x+\varphi(x)$. よって, $p'(x)=1+\varphi'(x)$, $p''(x)=\varphi''(x)$. このことから,

$$p'(\frac{\sqrt{30}}{10})=1-1=0, \qquad p''(\frac{\sqrt{30}}{10})=\varphi''(\frac{\sqrt{30}}{10})=-\frac{5}{6}\sqrt{30}<0.$$

従って, $z=f(x,y)$ は点 $(\frac{\sqrt{30}}{10},\frac{\sqrt{30}}{15})$ において極大値 $f(\frac{\sqrt{30}}{10},\frac{\sqrt{30}}{15})=\frac{\sqrt{30}}{6}$ をとる.

同様に, 点 $(-\frac{\sqrt{30}}{10},-\frac{\sqrt{30}}{15})$ において極小値 $f(-\frac{\sqrt{30}}{10},-\frac{\sqrt{30}}{15})=-\frac{\sqrt{30}}{6}$ をとる (演習; 各自確かめよ). □

◆◆◆確認問題◆◆◆

問題 1.7.2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$ で定義されるグラフ上の点 $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ.

問題 1.7.3. *(1)* $f(x,y)$ は C^2 級関数で, 点 (a,b) において $f(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \neq 0$ を満たすとする. このとき, 陰関数の定理から定まる点 (a,b) の近くで定義された $f(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ は 2 回微分可能で

$$\varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

が成り立つ事を示せ.

(2) $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ により定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ に対して, y', y'' を計算せよ.

問題 1.7.4. $a > 0$ として, アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ を考える. このとき, y', y'' を求めよ.

問題 1.7.5. 束縛条件 $3x^2 + 2y^2 = 1$ のもとで, $f(x,y) = x + 2y$ の極値を求めよ.

問題 1.7.6. 束縛条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $f(x,y) = x^3 + y^3$ の極値をとる点の候補を求めよ. また, 最大値・最小値を求めよ.

問題 1.7.7. 束縛条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ の極値を求めよ. また, 最大値・最小値を求めよ. ただし, $a \neq c$ または $b \neq 0$ とする. なお, 極値をとる点の座標は具体的に求めなくてもよい[2].

---

[2]線形代数の知識を用います. 具体的には，線形代数 II で学ぶ固有値・固有ベクトルに関する知識を使うので，現段階では解けないかもしれません.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 1.7.2 の解答例　$f_y(x, y) = 3y^2 - 2x$, $f_y(1, 1) = 1 \neq 0$ より, $f(x, y) = 0$ は点 $(1, 1)$ の近くで定義された陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する. $f_x(x, y) = 3x^2 - 2y$, $f_x(1, 1) = 1$ より, $\varphi'(1) = -1$. よって, 求める接線の方程式は, $y - 1 = -1(x - 1)$, すなわち, $y = -x + 2$ である. □

問題 1.7.3 の解答例　(1)　陰関数の定理より, $y = \varphi(x)$ は C^1 級関数で

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

が成り立つ. 両辺を x で微分すると, 商の微分の公式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{df_x(x,y)}{dx} f_y(x, y) - f_x(x, y)\frac{df_y(x,y)}{dx}}{(f_y(x, y))^2}.$$

連鎖律を用いて,

$$\frac{df_x(x, y)}{dx} = f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y)\frac{dy}{dx} = f_{xx}(x, y) - f_{xy}(x, y)\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)},$$

$$\frac{d_y(x, y)}{dx} = f_{yx}(x, y) + f_{yy}(x, y)\frac{dy}{dx} = f_{xy}(x, y) - f_{yy}(x, y)\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

を得る. これを $\frac{d^2y}{dx^2}$ の右辺に代入すると,

$$\varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

を得る.

(2)　$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1$ とおくと, $f_x(x, y) = 2ax + 2by$, $f_y(x, y) = 2bx + 2cy$ より, 直線 $bx + cy = 0$ 上の点を除いて $f_y(x, y) \neq 0$ であるから陰関数の定理を適応できる. 以下, 直線 $bx + cy = 0$ 上の点を除いて考える. 陰関数の定理より,

$$y' = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$$

と書ける. また, $f_{xx}(x, y) = 2a$, $f_{xy}(x, y) = 2b$, $f_{yy}(x, y) = 2c$ を (1) で得た結果に代入すると,

$$y'' = -\frac{a(bx + cy)^2 - 2b(ax + by)(bx + cy) + c(ax + by)^2}{(bx + cy)^3} = -\frac{ac - b^2}{(bx + cy)^3}$$

□

問題 1.7.4 の解答例　$f(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$ とおく. $f_x(x, y) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $f_y(x, y) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ であるから, 4 点 $(x, y) \neq (0, \pm a), (\pm a, 0)$ を除いて $f(x, y)$ は C^1 級である. この 4 点を除いて, 陰関数の定理が適応できるので,

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

を得る. また, 前問の (1) より,

$$y'' = -\frac{(-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}})(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}})^2 + (-\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}})(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})^2}{\frac{8}{27y}} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{x^3y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

□

問題 1.7.5 の解答例 $g(x,y) = 3x^2+2y^2-1$ とおくと, $g_x(x,y) = 6x$, $g_y(x,y) = 4y$ であるから, $(g_x(x,y), g_y(x,y)) = (0,0)$ となる点は, $(x,y) = (0,0)$ のみ. これは束縛条件に反する. よって, 束縛条件下で $(g_x(x,y), g_y(x,y)) \neq (0,0)$ を満たし, ラグランジュの未定乗数法の仮定を満たす.

ある実数 λ が存在して, $f(x,y)$ の極値をとる点の候補は, 次の方程式を満たす.

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 1 - 6x\lambda, \\ 0 &= f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 2 - 4y\lambda = 2(1-2y\lambda). \end{aligned}$$

これらの 2 式から $\lambda \neq 0$ であり, $x = \frac{1}{6\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$ を得る. 束縛条件に代入すると, $\lambda^2 = \frac{7}{12}$ を得るので, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$. よって, $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{21}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}})$. この 2 点は極値をとる点の候補である.

$g(x,y) = 3x^2+2y^2-1 = 0$ は単純閉曲線を表し, $f(x,y) = x+2y$ は連続関数であるから, $f(x,y)$ は最大値・最小値を持ち, それらは極大値・極小値である. よって, 極大値・極小値は存在し, 極値をとる点の候補は 2 点のみであるから, それらが極大値・極小値をとる点である. $f(\pm\frac{1}{\sqrt{21}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}) = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}$ であるから, 極大値は $f(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}) = \frac{\sqrt{21}}{3}$ で, 最小値は $f(-\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}) = -\frac{\sqrt{21}}{3}$ である. □

問題 1.7.6 の解答例 $g(x,y) = x^2+y^2-1$ とおくと, $g_x(x,y) = 2x$, $g_y(x,y) = 2y$ より, $(g_x(x,y), g_y(x,y)) = (0,0)$ となる点は, $(x,y) = (0,0)$ のみ. これは束縛条件に反する. よって, 束縛条件下で $(g_x(x,y), g_y(x,y)) \neq (0,0)$ を満たし, ラグランジュの未定乗数法の仮定を満たす.

ある実数 λ が存在して, $f(x,y)$ の極値をとる点の候補は次の方程式を満たす.

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = x(3x-2\lambda), \\ 0 &= f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = y(3y-2\lambda). \end{aligned}$$

これらの 2 式から, $x = 0, \frac{2}{3}\lambda$ および $y = 0, \frac{2}{3}\lambda$ を得る. $(x,y) = (0,0)$ は束縛条件に反するため除外すると, $(x,y) = (0, \frac{2}{3}\lambda), (\frac{2}{3}\lambda, 0), (\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$ を得る.

$(x,y) = (0, \frac{2}{3}\lambda)$ を束縛条件に代入すると, $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ を得る. よって, $(x,y) = (0, \pm 1)$. $(x,y) = (\frac{2}{3}\lambda, 0)$ を束縛条件に代入すると, $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ を得る. よって, $(x,y) = (\pm 1, 0)$. $(x,y) = (\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$ を束縛条件に代入すると $\lambda = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$ を得る. よって, $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. 従って, 極値をとる点の候補は $(x,y) = (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ の 6 点である.

$g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ は単純閉曲線を表し, $f(x,y) = x^3+y^3$ は連続関数であるから, $f(x,y)$ は最大値・最小値を持ち, それらは極大値・極小値である. 極値をとる点の候補である 6 点における値は $f(0,1) = f(1,0) = 1$, $f(0,-1) = f(-1,0) = -1$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから, 最大値は $f(0,1) = f(1,0) = 1$ であり, 最小値は $f(0,-1) = f(-1,0) = -1$ である[3].

問題 1.7.7 の解答例 $g(x,y) = x^2+y^2-1$ とおくと, $g_x(x,y) = 2x$, $g_y(x,y) = 2y$ より, $(g_x(x,y), g_y(x,y)) = (0,0)$ となる点は, $(x,y) = (0,0)$ のみ. これは束縛条件に反する. よって, 束縛条件下で $(g_x(x,y), g_y(x,y)) \neq (0,0)$ を満たし, ラグランジュの未定乗数法の仮定を満たす.

ある実数 $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して, $f(x,y)$ の極値をとる点の候補は次の方程式を満たす.

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 2ax + 2by - 2\lambda x, \\ 0 &= f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 2bx + 2cy - 2\lambda y. \end{aligned}$$

これを整理すると, 連立方程式 $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O$ を満たす. 束縛条件から $(x,y) \neq (0,0)$ を得る. 上の連立方程式が $(x,y) = (0,0)$ でない解を持つことは, $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = 0$ である

[3] $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ は極値かもしれませんが（それらよりも絶対値の大きい 1 や −1 をとる値がある以上,）最大値・最小値ではありません.

ことと同値である．よって, $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$. この 2 次方程式の判別式を D とすると, $D = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$ であるから, 異なる 2 つの実数解

$$\lambda = \frac{1}{2}\{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\}$$

を持つ. この 2 つの値の小さい方を λ_1, 大きい方を λ_2 とおく. これらは, 行列 $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値である. λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を束縛条件 $x_i^2 + y_i^2 = 1$ を満たすように取る $(i = 1, 2)$. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の 2 点が極値をとる点の候補である.

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ は単純閉曲線を表し, $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ は連続関数であるから, 最大値・最小値を持ち, それらは極大値・極小値である. 極値をとる候補の点は 2 点であるからそれらは極大値・極小値を与える点である. 固有方程式 $Av_i = \lambda_i v_i$ より, $ax_i + by_i = \lambda_i x_i$, $bx_i + cy_i = \lambda_i y_i$ を満たす. この 2 式と $x_i^2 + y_i^2 = 1$ より,

$$f(x_i, y_i) = ax_i^2 + 2bx_iy_i + by_i^2 = x_i(ax_i + by_i) + y_i(bx_i + cy_i) = x_i\lambda_i x_i + y_i\lambda_i y_i = \lambda_i(x_i^2 + y_i^2) = \lambda_i$$

より, 極小値は

$$f(x_1, y_1) = \lambda_1 = \frac{1}{2}\{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\},$$

極大値は

$$f(x_2, y_2) = \lambda_2 = \frac{1}{2}\{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\}$$

である. □

演習問題 No.8

担当：新國裕昭

2 多変数関数の積分学（重積分）

2.1 重積分の意味, 累次積分を使った 2 重積分計算

教科書 p.153 の例 3, 例 4, 問 5 を解いた上で，以下の問題を解いて練習してください. 重積分を計算するときには必ず**積分領域を図示する**ということを心がけましょう. 高校生の時，積分の計算練習はたくさんしたはずです. 重積分についてもそれと同じくらいたくさん計算練習しましょう. ここにある問題の他にも図書館で微分積分学の本を借りて計算練習をしてください.

問題 2.1.1. 次の重積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \iint_D \sqrt{xy}\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad 0 \le y \le 1, \quad y^2 \le x \le y\}.$

(2) $I_2 = \iint_D e^{x+y}dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 1\}.$

(3) $I_3 = \iint_D (x+y+1)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x^2\}.$

(4) $I_4 = \iint_D (x+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) | \quad y^2 \le x \le y+2\}$

(5) $I_5 = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D = \{(x,y) | \quad 0 \le x \le y, \quad 1 \le y \le 4\}.$

問題 2.1.2. D を 3 直線 $y=0$, $x=1$, $y=\frac{\pi}{2}x$ が囲む 3 角形とするとき, 次の重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D \sin y\,dxdy.$$

問題 2.1.3. $a > 0$ とし, 第一象限における 放物線 $y^2 = ax$, 円 $y^2 = ax - x^2$, 直線 $x = a$ が囲む閉領域 D を考える. このとき, 次の 2 つの重積分を計算せよ.

$$I_1 = \iint_D (y+y^3)dxdy, \qquad I_2 = \iint_D (x+y)dxdy.$$

問題 2.1.4. 放物線 $x^2 = ay$ と直線 $y = 2a - x$ が囲む閉領域 D を考える. このとき, 次の重積分を計算せよ.

$$I_1 = \iint_D (x+y)dxdy, \qquad I_2 = \iint_D (x^2+y^2)dxdy.$$

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 2.1.1 の解答例　(1) D は横線領域であるから,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}\,dxdy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]_{x=y^2}^{x=y} dy = \int_0^1 \frac{2}{3}y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{3}{2}} - y^3)dy \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 (y^2 - y^{\frac{7}{2}})dy = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

(2) D は縦線領域であるから,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_x^1 e^{x+y}dydx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\right]_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 (e^{1+x} - e^{2x})dx \\ &= \left[e^{1+x} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \left(e^2 - \frac{e^2}{2}\right) - \left(e - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) D は縦線領域であるから,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (x + y + 1)dydx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 + y\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^4 + x^2\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{41}{60}. \end{aligned}$$

(4) D を図示すると, y の動く範囲は $-1 \le y \le 2$ であることがわかる. つまり, $D = \{(x, y) \mid \ -1 \le y \le 2,\quad y^2 \le x \le y + 2\}$ (横線領域) であるので,

$$I_4 = \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} (x + y)dx\right)dy = \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{x=y^2}^{x=y+2} dy = \int_{-1}^2 \left\{\frac{1}{2}(y + 2)^2 + y(y + 2) - \frac{1}{2}y^4 - y^3\right\}dy = \frac{189}{20}.$$

(5) D は横線領域であるから,

$$I_5 = \int_1^4 \left(\int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx\right)dy = \int_1^4 \left[\sqrt{x^2 + y^2}\right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_1^4 (\sqrt{2} - 1)ydy = (\sqrt{2} - 1)\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^4 = \frac{15}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

□

問題 2.1.2 の解答例　$D = \{(x, y) \mid \ 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}x\}$ と縦線集合として表せる. したがって, 累次積分によって次のように計算できる.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin y dy\right)dx = \int_0^1 \left[-\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{2}x} dx = \int_0^1 \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[x - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

□

問題 2.1.3 の解答例　2 つの重積分の積分領域は $D = \{(x, y) \mid \ 0 \le x \le a,\quad \sqrt{ax - x^2} \le y \le \sqrt{ax}\}$ である.

(1)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} (y + y^3)dydx = \int_0^a \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4\right]_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} dx \\ &= \int_0^a \frac{-x^4 + 2ax^3 + 2x^2}{4}dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{4}\left(-\frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{2} + \frac{2}{3}a^3\right) = \frac{3}{40}a^5 + \frac{1}{6}a^3. \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} (x+y)dydx = \int_0^a \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} dx \\
&= \int_0^a \left[x\sqrt{ax} + \frac{1}{2}ax - x\sqrt{ax-x^2} - \frac{1}{2}(ax-x^2)\right]dx = \int_0^a \left(\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} - x\sqrt{ax-x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)dx \\
&= \left[\sqrt{a}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^a - \int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx = \frac{2}{5}a^3 + \frac{1}{6}a^3 - \int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx.
\end{aligned}
$$

$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx = \int_0^a x\sqrt{-(x-\frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}}dx$ を $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sin\theta$ とおいて計算すれば,

$$
\begin{aligned}
\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2}(1+\sin\theta)\cdot\frac{a}{2}\cos\theta\cdot\frac{a}{2}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{a^3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta d\theta = \frac{a^3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta + \frac{a^3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{a^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta \qquad (\text{偶関数・奇関数の性質より}) \\
&= \frac{a^3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{a^3}{16}\pi
\end{aligned}
$$

を得る. よって, $I_2 = \left(\frac{17}{30} - \frac{\pi}{16}\right)a^3$. □

問題 2.1.4 の解答例　与えられた重積分は, 縦線集合 $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad -2a \le x \le a, \quad \frac{x^2}{a} \le y \le 2a - x\}$ における重積分である. よって, 累次積分により次のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-2a}^a \int_{x^2/a}^{2a-x} (x+y)dydx = \int_{-2a}^a \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2/a}^{2a-x} dx = \int_{-2a}^a \left\{x(2a-x) + \frac{1}{2}(2a-x)^2 - \frac{x^3}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{a^2}\right\}dx \\
&= \int_{-2a}^a \left(-\frac{x^4}{2a^2} - \frac{x^3}{a} - \frac{x^2}{2} + 2a^2\right)dx = \left[-\frac{x^5}{10a^2} - \frac{x^4}{4a} - \frac{1}{6}x^3 + 2a^2x\right]_{-2a}^a \\
&= \left(-\frac{a^3}{10} - \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{6} + 2a^3\right) - \left(\frac{32}{5}a^3 - 4a^3 + \frac{4}{3}a^3 - 4a^3\right) = \frac{a^3}{12}. \\
I_2 &= \int_{-2a}^a \int_{x^2/a}^{2a-x} (x^2+y^2)dydx = \int_{-2a}^a \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_{x^2/a}^{2a-x} dx \\
&= \int_{-2a}^a \left\{x^2(2a-x) + \frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^4}{a} - \frac{x^6}{3a^3}\right\}dx \\
&= \int_{-2a}^a \left(-\frac{x^6}{3a^3} - \frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{3} + 4ax^2 - 4a^2x + \frac{8a^3}{3}\right)dx \\
&= \left[-\frac{x^7}{21a^3} - \frac{x^5}{5a} - \frac{x^4}{3} + \frac{4a}{3}x^3 - 2a^2x^2 + \frac{8a^3}{3}x\right]_{-2a}^a \\
&= \left(-\frac{43}{7} - \frac{33}{5} + \frac{75}{3} + 6\right)a^4 = \frac{2347}{105}a^4.
\end{aligned}
$$

□

演習問題 No.9

担当：新國裕昭

2.2 累次積分の積分順序交換

問題 2.2.1. $\int_{x^2}^{1} xe^{y^2} dy$ が計算できない事に注意して, 2 重積分 $I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 xe^{y^2} dydx$ を求めよ.

問題 2.2.2. $f(x, y)$ を連続関数とする. この時, 次の累次積分の順序を交換せよ.

(1) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dydx$

(2) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dydx$

(3) $\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dxdy$

(4) $\int_0^a \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f(x, y) dydx$ (a は正定数とする.)

(5) $\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x, y) dydx$

問題 2.2.3. $f(x, y)$ を連続関数とする. この時, 次の積分を簡単にせよ. （ただし，a は正の定数とする.）

$$\int_{2a}^{3a} \int_{y-2a}^{a} f(x, y) dxdy + \int_0^{2a} \int_0^a f(x, y) dxdy + \int_{-a}^{0} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dxdy.$$

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 2.2.1 の解答例　2 重積分 I は, 縦線集合 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1\}$ における 2 重積分である. これは横線集合 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ に書き換えられる. よって,

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2} dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y e^{y^2} dy = \left[\frac{1}{4} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}(e-1).$$

□

問題 2.2.2 の解答例　(1)　積分領域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$（縦線集合）は横線集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq y \leq 4, \quad \frac{1}{2} y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ に書きかえられるので,

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy dx = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy.$$

(2)　積分領域 $\{(x, y) |\quad 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ (縦線集合) は横線集合 $\{(x, y) |\quad 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ に書き換えられるので,

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy.$$

(3)　積分領域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y^2\}$（横線集合）は縦線集合

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq x \leq 1, \quad \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

に書き換えられるので,

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx.$$

(4)　積分領域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq x \leq a, \quad -\sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}\}$（縦線集合）は横線集合

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2} \leq x \leq \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}\}$$

に書き換えられるので,

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}}^{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}} f(x, y) dx dy.$$

(5)　積分領域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x^4\}$ (縦線領域) は横線集合

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq y \leq 1, \quad y^{\frac{1}{2}} \leq x \leq y^{\frac{1}{4}}\}$$

に書き換えられる. よって,

$$\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{y^{1/4}} f(x, y) dx dy.$$

問題 2.2.3 の解答例　積分領域は, 直線 $y = x + 2a$, $x = 0$, $x = a$ および円 $x^2 + y^2 = a^2$ の下側（第 4 象限にある部分）によって囲まれた部分である事がわかる. したがって, 与えられた重積分は縦線領域 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \leq x \leq a, \quad -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + 2a\}$ 上の積分

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x, y) dy dx$$

に書き換えられる.

□

演習問題 No.10

担当：新國裕昭

2.3 2 重積分の変数変換

問題 2.3.1. 次の 2 重積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$

(2) $I_2 = \iint_D (x^2+y^2) dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ ($a, b > 0$ は定数).

(3) $I_3 = \iint_D e^{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$

(4) $I_4 = \iint_D (x+y)^2 \sin(x-y) dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad 0 \leq x+y \leq \pi, \quad 0 \leq x-y \leq \pi\}.$

(5) $I_5 = \iint_D x^2y^2 dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad x^2+y^2 \leq ax, \quad y \geq 0\}$ ($a > 0$ は定数).

(6) $I_6 = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy,$ D は半径 1 の円の内部.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 2.3.1 の解答例　(1) $I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} dr d\theta = 2\pi\left[\sqrt{1+r^2}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)\pi.$

(2)　$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ と変数変換すると, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = abr$ であるから,

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (a^2r^2\sin^2\theta + b^2r^2\cos^2\theta)abrdrd\theta = \frac{ab}{4}\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)d\theta.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\sin\theta(-\cos\theta)'d\theta = [-\sin\theta\cos\theta]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)d\theta = 2\pi - \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\end{aligned}$$

より, $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2 d\theta = \pi$ である. 従って,

$$I_2 = \frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2).$$

(3)

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{r^2} rdrd\theta = 2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_1^2 = \pi(e^4 - e).$$

(4)　$u = x+y, v = x-y$ と変数変換すると, $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ であるから, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. よって,

$$I_4 = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} u^2\sin v\,\frac{1}{2}dudv = \frac{\pi^3}{3}.$$

(5)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと, $E = \{(r,\theta)|\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le r \le a\cos\theta\}$ が D に写される. したがって,

$$\begin{aligned}I_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} r^4\cos^2\theta\sin^2\theta rdrd\theta \\ &= \frac{1}{6}a^6\int_0^{\pi/2}\cos^8\theta\sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{6}a^6\left(\int_0^{\pi/2}\cos^8\theta d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos^{10}\theta d\theta\right) \\ &= \frac{1}{6}a^6\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{3072}\pi a^6.\end{aligned}$$

(6)　極座標変換 $x = a\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いると,

$$I_6 = \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdrd\theta.$$

$r^2 = t$ とおくと,

$$I_6 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dtd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin^{-1}t + \sqrt{1-t^2}\right]_0^1 d\theta = \pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

□

演習問題 No.11

担当：新國裕昭

2.4　広義 2 重積分

問題 2.4.1.　$0 < \alpha < 1,\ R > 0,\ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$ の時, 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ を求めよ.

問題 2.4.2.　$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$ の時, 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2)dxdy$ を求めよ

問題 2.4.3.　$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ の時, 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ を求めよ.

問題 2.4.4.　$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad x^2 + y^2 \le 1\}$ の時, 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ を求めよ.

問題 2.4.5.　$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad x^2 + y^2 \le a^2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0\}$ の時, 広義 2 重積分

$$\iint_D \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$$

を求めよ. (但し, $a > 0$ とする.)

問題 2.4.6.　$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\quad x \ge 1,\quad y \ge 1\}$ の時, 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^p y^q}$ を求めよ. (但し, $p, q \ge 2$ とする.)

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 2.4.1 の解答例　$D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ \ \frac{1}{n^2} \le x^2 + y^2 \le R^2\}$ とおくと，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似列であるから，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{1/n}^R \frac{1}{r^{2\alpha}} rdrd\theta = 2\pi \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^R r^{1-2\alpha}dr \\ &= 2\pi\lim_{n\to\infty}\left[\frac{r^{2-2\alpha}}{2(1-\alpha)}\right]_{1/n}^R = \frac{\pi}{1-\alpha}\lim_{n\to\infty}\left(R^{2-2\alpha} - \frac{1}{n^{2-2\alpha}}\right) = \frac{\pi}{1-\alpha}R^{2-2\alpha}.\end{aligned}$$

□

問題 2.4.2 の解答例　$D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ \ \frac{1}{n^2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ とおくと，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似列である. よって，

$$\begin{aligned}\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\log(x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{1/n}^1 \log(r^2)\cdot rdrd\theta \\ &= 4\pi\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 r\log r dr = 4\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{2n^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}\right).\end{aligned}$$

（最後の等式は部分積分を用いた.） また，ロピタルの定理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^2} = 0$. 以上により，$\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy = 4\pi\left(-\frac{1}{4}\right) = -\pi.$ □

問題 2.4.3 の解答例　$D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \frac{1}{n^2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ とすると，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似列である. よって，

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\int_{1/n}^1 \frac{1}{r}\cdot rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

□

問題 2.4.4 の解答例　$D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ \ 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1 - \frac{1}{n}\}$ とすると, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似列である. よって，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta \\ = \lim_{n\to\infty}2\pi\Big[-\sqrt{1-r^2}\Big]_0^{1-\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}2\pi\left(1 - \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right) = 2\pi.\end{aligned}$$

□

問題 2.4.5 の解答例　$D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ \ \frac{1}{n} \le \sqrt{x^2+y^2} \le a\}$ とすると, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似列である. $\sin^{-1}\sin\theta = \theta$ であるから，

$$\iint_D \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\int_{1/n}^a \theta rdrd\theta = \frac{\pi^2}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a^2 - \frac{1}{n^2}) = \frac{\pi^2a^2}{16}.$$

□

問題 2.4.6 の解答例　$D_n = \{(x,y) | 1 \le x \le n, 1 \le y \le n\}$ とおくと, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似列である.

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^py^q} = \lim_{n\to\infty}\int_1^n\int_1^n \frac{dxdy}{x^py^q} = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big]_1^n\Big[\frac{1}{(1-q)y^{q-1}}\Big]_1^n = \frac{1}{(1-p)(1-q)}.$$

□

演習問題 No.12

担当：新國裕昭

2.5 3 重積分

問題 2.5.1. $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0\}$ とする. この時, 空間極座標を用いて, 次の *3* 重積分を求めよ.

$$I_1 = \iiint_V \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

問題 2.5.2. $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad z \geq 0\}$ とする. この時, 空間極座標を用いて, 次の *3* 重積分を求めよ.

$$I_2 = \iiint_V z^2 dxdydz.$$

問題 2.5.3. $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ とする. この時， 円柱座標を用いて， 次の *3* 重積分を求めよ.

$$I_3 = \iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz.$$

問題 2.5.4. $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ $(a > 0)$ とする. この時，空間極座標を用いて, 次の広義 *3* 重積分を求めよ.

$$I_4 = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

問題 2.5.5. $I_5 = \displaystyle\iiint_{\mathbf{R}^3} x^2 e^{-x^2 - y^2 - z^2} dxdydz$ を計算せよ.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 2.5.1 の解答例　空間極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ により，

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{1}{r^{\frac{4}{3}}}\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_1^2 r^{\frac{2}{3}}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi\left[\frac{3}{5}r^{\frac{5}{3}}\right]_1^2 = \frac{6}{5}\pi(2^{\frac{5}{3}}-1).$$

□

問題 2.5.2 の解答例　空間極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ により，

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \frac{2}{5}\pi a^5\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{2}{5}\pi a^5\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{15}\pi a^5.$$

□

問題 2.5.3 の解答例　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$ と変数変換すると，(r,θ,z) の定義域は $\tilde{V} = \{(r,\theta,z)|\quad 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\}$ である. よって，

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r^3dzdrd\theta = 2\pi\int_0^2 r^3(4-r^2)dr = 2\pi\int_0^2(4r^3-r^5)dr = \frac{32}{3}\pi.$$

□

問題 2.5.4 の解答例　$V_n = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|\quad \frac{1}{n^2}\le x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ とおくと，$\{V_n\}_{n=1}^\infty$ は V の近似増大列である. 従って，

$$I_4 = \lim_{n\to\infty}\iiint_{V_n}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^a\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \lim_{n\to\infty}4\pi\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{1/n}^a = 2\pi a^2.$$

□

問題 2.5.5 の解答例　$V_n = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|\quad x^2+y^2+z^2\le n^2\}$ とおくと，$\{V_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbf{R}^3$ の近似増大列である. 従って，

$$\begin{aligned}
I_5 &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^n r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi e^{-r^2}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^n r^4e^{-r^2}dr \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\Big[-\frac{1}{2}r^3e^{-r^2}\Big]_0^n+\frac{3}{2}\int_0^n r^2e^{-r^2}dr\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\Big[-\frac{r}{2}e^{-r^2}\Big]_0^n+\frac{3}{4}\int_0^n e^{-r^2}dr\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\int_0^n e^{-r^2}dr = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{2}. \qquad \text{(教科書 162 ページの例題 4 参照.)}
\end{aligned}$$

□

微分積分学 II 演習問題 No.13

担当：新國裕昭

2.6 重積分の応用

第 13 節では, 重積分と面積・体積・曲面積の関係について学びます.

(1) 有界集合 $D \subset \mathbf{R}^2$ の面積 $|D|$ は

$$|D| = \iint_D dxdy$$

で与えられる.

(2) 有界集合 $G \subset \mathbf{R}^3$ の体積 $|G|$ は

$$|G| = \iiint_G dxdydz$$

で与えられる.

(3) 領域 D における C^1 級関数 $z = f(x, y)$ が定める曲面

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 | \quad (x, y) \in D\}$$

の曲面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dxdy$$

で与えられる.

以上を踏まえたうえで, いくつか例題を見てみることにします.

例題 2.6.1. 2 つの円柱の共通部分 $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x^2 + z^2 \leq a^2\}$ ($a > 0$) の体積を求めよ.

解答例 $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \quad -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\}$ と x に関する単純な領域に書き表すことが出来るので,

$$\begin{aligned}
|V| &= \iiint_V dzdydx = \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dzdydx \\
&= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2 - x^2} dydx = 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\
&= 8\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = 8\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{16}{3}a^3.
\end{aligned}$$

□

例題 2.6.2. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の $x \geq b$ ($0<b<a$ とする) の部分の曲面積を求めよ.

$S=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2+y^2+z^2=a^2, \quad z \geq b\}$ とおく. 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の $z=b$ での切り口は円 $x^2+y^2=a^2-b^2$ の内部

$$D=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \quad x^2+y^2 \leq a^2-b^2\}$$

である. $z^2=a^2-x^2-y^2, z \geq b>0$ より, $z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
|S| &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy.
\end{aligned}$$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と変数変換すると, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{a^2-b^2}$ であるから,

$$|S| = a\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\,rdrd\theta = 2\pi a\Big[-\sqrt{a^2-r^2}\Big]_0^{\sqrt{a^2-b^2}} = 2\pi a(a-b).$$

□

◆◆◆確認問題◆◆◆

問題 2.6.3. 円柱座標を用いて, $V=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \quad x^2+y^2 \geq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$ の体積を求めよ.

問題 2.6.4. $V=\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \middle| \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\}$ $(a,b,c>0)$ の体積を求めよ.

問題 2.6.5. $z=x^2+y^2$ と平面 $z=1$ で囲まれた部分 V の体積を求めよ.

◇◇◇確認問題の解答例◇◇◇

問題 2.6.3 の解答例　円柱座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ に変換すると，(r,θ,z) の定義域は

$$\tilde{V} = \{(r,\theta,z)| \quad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le r\}$$

である. 従って，

$$|V| \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r rdzdrd\theta = 2\pi\int_0^1 r^2dr = \left[\frac{2\pi}{3}r^3\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

□

問題 2.6.4 の解答例　$x = ar\sin\theta\cos\varphi, y = br\sin\theta\sin\varphi, z = cr\cos\theta$ と変数変換をすると，

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = abcr^2\sin\theta$$

である. よって，

$$|V| \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \frac{1}{3}abc\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi}{3}abc.$$

□

問題 2.6.5 の解答例　V を z 軸に水平な平面 $z = z$ で切ると，その切り口は半径 $\sqrt{z}$ の円

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2| \quad x^2 + y^2 \le z\}$$

である.D の面積は $|D| = \pi z$ であるから，

$$|V| = \int_0^1\left(\iint_D dxdy\right)dz = \int_0^1 \pi zdz = \frac{\pi}{2}.$$

□