微分積分学1　第6回

2015 年 5 月 25 日 (月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$　次の関数の不定積分の公式を完成させよ.

(1.1)　$a \neq -1$ の時, $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

(1.2)　$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

(1.3)　$a \neq 0$ の時, $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

(1.4)　$\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(1.5)　$\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$　　(C は積分定数)

$\boxed{2}$ 部分積分をすることにより, 次の不定積分を計算しなさい.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \log x dx$　(2) $I_2 = \displaystyle\int x \log x dx$　(3) $I_3 = \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$　(4) $I_4 = \displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int e^x \cos x dx$

$\boxed{\text{解答例}}$　$\boxed{2}$ 以下, C は積分定数とする.

(1) $I_1 = \displaystyle\int x' \log x dx = x\log x - \int x(\log x)' dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\log x - \int 1 dx = x\log x - x + C$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$

(3) 部分積分をすると, 計算しようとしているものについての関係式が得られることがある:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x' \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - I_3 + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

より, 不定積分であることも考慮して,

$$I_3 = \frac{1}{2}\{x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\} + C$$

.

(4) 部分積分を 2 回繰り返す:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int x^2 \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int 2x \cdot \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{x e^{2x}}{2} + \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C. \end{aligned}$$

(5) (3) と同様に, 部分積分をすると, 計算しようとしているものについての関係式が得られる:

$$\begin{aligned} I_5 &= \int (e^x)' \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x\cos x + \int (e^x)' \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x(\cos x + \sin x) - I_5 \end{aligned}$$

であるので, $I_5 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$.

$\boxed{3}$ 置換積分をすることにより, 次の積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int (5x-2)\sqrt{1-x}dx$ (2) $I_2 = \displaystyle\int x(x^2+3)^5 dx$ (3) $I_3 = \displaystyle\int \cos^3 x dx$ (4) $I_4 = \displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$

$\boxed{\text{解答例}}$ 以下, C は積分定数とする.

(1) $\sqrt{1-x} = t$ とおくと, $x = 1 - t^2$ より, $\frac{dx}{dt} = -2t$. よって,

$$I_1 = \int \{5(1-t^2)-2\}t \cdot (-2t)dt = \int (10t^4 - 6t^2)dt = 2t^5 - 2t^3 + C = 2t^3(t^2-1) + C = -2x(1-x)\sqrt{1-x} + C.$$

(2) $x^2 + 3 = t$ とおくと $2x\frac{dx}{dt} = 1$ であるので,

$$I_2 = \int \frac{t^5}{2}dt = \frac{t^6}{12} + C = \frac{1}{12}(x^2+3)^6 + C.$$

(3) $\sin x = t$ とおくと, $\cos x\frac{dx}{dt} = 1$ であるから,

$$I_3 = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \int (1-t^2)dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

(4) $\sin x = t$ とおくと, $\cos x\frac{dx}{dt} = 1$ より,

$$I_4 = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

$\boxed{4}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ とおく.

(1) $n \geq 2$ に対し, $I_n = \dfrac{1}{n}\{-\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}\}$ を示せ.

(2) I_6 を求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x(-\cos x)' dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\sin^{n-1} \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

であるから,

$$nI_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}.$$

両辺を n で割ると,

$$I_n = \frac{1}{n}\{-\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}\}$$

を得る.

(2) (1) の結果を利用して,

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{1}{6}(-\cos x \sin^5 x + 5I_4) \\
&= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4}(-\cos x \sin^3 x + 3I_2) \\
&= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \sin^3 x + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2}(-\cos x \sin x + I_0) \\
&= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \sin^3 x - \frac{5}{16}\cos x \sin x + \frac{5}{16}\int 1 dx \\
&= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \sin^3 x - \frac{5}{16}\cos x \sin x + \frac{5}{16}x + C.
\end{aligned}$$

微分積分学 1　第 7 回 (1 枚目)

2015 年 6 月 1 日 (月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$　次の関数の不定積分を求めなさい.

(1.1) $\dfrac{1}{x^5(x+1)}$　　(1.2) $\dfrac{x^2}{x^2-x-6}$　　(1.3) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

$\boxed{\text{解答例}}$

(1.1)

$$\frac{1}{x^5(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \frac{e}{x^5} + \frac{f}{x+1}$$

とおくと

$$1 = (a+f)x^5 + (a+b)x^4 + (b+c)x^3 + (c+d)x^2 + (d+e)x + e.$$

これを解いて, $a = 1, b = -1, c = 1, d = -1, e = 1, f = -1$ を得る. 従って,

$$\frac{1}{x^5(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x+1}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^5(x+1)} &= \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \log|x+1| + C \\ &= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + C \qquad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

(1.2)

$$\frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{x^2-x-6+x+6}{x^2-x-6} = 1 + \frac{x+6}{x^2-x-6} = 1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-3}$$

と部分分数分解できるので,

$$\int \frac{x^2}{x^2-x-6}dx = x - \frac{4}{5}\log|x+2| + \frac{9}{5}\log|x-3| + C \qquad (C \text{ は積分定数}).$$

(1.3)

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+4}$$

とおいて, 係数を計算すると $a = c = 0, b = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$ を得る.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{1}{3(x^2+4)}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} &= \frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C \\ &= \frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C \qquad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$\boxed{2}$　次の関数の不定積分を求めなさい.

(2.1)　$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　　(ヒント: $\dfrac{1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}$ に注意せよ.)

(2.2)　$\dfrac{1}{x^3+1}$

$\boxed{\text{解答例}}$

(2.1)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \left\{ \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \right\} dx \\ &= \tan^{-1} x - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \tan^{-1} x + \int \frac{x}{2} \cdot (\frac{1}{x^2+1})' dx \\ &= \tan^{-1} x + \frac{x}{2x^2+2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{x}{2x^2+2} + C \qquad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

(2.2)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

とおくと,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

これは, x についての恒等式であるから,

$$A+B=0, \quad -A+B+C=0, \quad A+C=1$$

を満たす。これを解くと, $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$ となるので,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

と部分分数分解できる。よって,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ &= \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

微分積分学1　第7回(2枚目)

2015年6月1日(月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$　次の関数の不定積分を求めなさい.

(1.1) $\dfrac{1}{x^3(2x+1)}$　　(1.2) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$　　(1.3) $\dfrac{120}{(x^2+4)(x-2)(x+1)}$

$\boxed{\text{解答例}}$ (1.1) $\dfrac{1}{x^3(2x+1)} = \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \dfrac{a_3}{x^3} + \dfrac{b}{2x+1}$ とおく. 両辺に $x^3(2x+1)$ をかけて,

$$1 = a_1x^2(2x+1) + a_2x(2x+1) + a_3(2x+1) + bx^3$$

を得る. これは x についての恒等式なので，各係数を比較して, $a_1 = 4$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$, $b = -8$ を得る. よって, $\dfrac{1}{x^3(2x+1)} = \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{8}{2x+1}$ と部分分数分解される. 両辺を積分して,

$$\int \frac{1}{x^3(2x+1)}dx = 4\log|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} - 4\log|2x+1| + C = 4\log\left|\frac{x}{2x+1}\right| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C. \quad (C\text{ は積分定数})$$

(1.2) $\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{(x^2-1)x+x}{x^2-1} = x + \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)$ と部分分数分解される. よって，両辺を積分すると,

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C. \quad (C\text{ は積分定数})$$

(1.3) $\dfrac{120}{(x^2+4)(x-2)(x+1)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+4} + \dfrac{C}{x-2} + \dfrac{D}{x+1}$ とおく. 両辺に $(x^2+4)(x-2)(x+1)$ をかけると,

$$120 = (Ax+B)(x-2)(x+1) + C(x^2+4)(x+1) + D(x^2+4)(x-2).$$

係数を比較して, $A = 3$, $B = -18$, $C = 5$, $D = -8$ を得る. よって,

$$\frac{120}{(x^2+4)(x-2)(x+1)} = \frac{3x-18}{x^2+4} + \frac{5}{x-2} - \frac{8}{x+1}$$

と部分分数分解される. 両辺を積分すると,

$$\int \frac{120}{(x^2+4)(x-2)(x+1)}dx = \frac{3}{2}\log(x^2+4) - 9\tan^{-1}\frac{x}{2} + 5\log|x-2| - 8\log|x+1| + C. \quad (C\text{ は積分定数})$$

公式　$a \neq 0$ に対して, $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ が成り立つ.

$\boxed{2}$ 次の関数の不定積分を求めなさい.

(2.1) $\dfrac{1}{x^4+1}$

(2.2) $\dfrac{4}{(x^2+1)^2(x-1)}$

$\boxed{\text{解答例}}$

(2.1) $(x^4+1)=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ であることに注意して部分分数分解すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2}+\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2}-\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{(x^2-\sqrt{2}x+1)'}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}
\end{aligned}$$

となる(注 1). 従って,

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^4+1} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)-\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)\}+C \qquad (C\text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

である(注 2).

(2.2) $\dfrac{4}{(x^2+1)^2(x-1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\dfrac{E}{x-1}$ とおく. 両辺に $(x^2+1)^2(x-1)$ をかけて,

$$4=(Ax+B)(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x-1)+E(x^2+1)^2.$$

各係数を比較することで, $A=-1$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-2$, $E=1$ を得る. よって,

$$\frac{4}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{-x-1}{x^2+1}-\frac{2x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x-1}$$

と部分分数分解される. 両辺を積分すると,

$$\int\frac{4}{(x^2+1)^2(x-1)}dx=-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\tan^{-1}x+\frac{1}{x^2+1}-2\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{x}{2x^2+2}\right)+\log|x-1|+C.$$

ここで, 一部で第 7 回 (1 枚目) $\boxed{2}$ (2.1) の結果を用いた. 式を整理すれば,

$$\int\frac{4}{(x^2+1)^2(x-1)}dx=\log\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-2\tan^{-1}x+\frac{1-x}{x^2+1}+C. \quad (C\text{ は積分定数})$$

(注 1)各自で確かめよ

(注 2)log の中身に絶対値が付いていないのには理由があります. どうしてでしょう？

微分積分学1　第8回(1枚目)

2015年6月8日(月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　　名前

[1] 次の不定積分を求めなさい.

(1.1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{1+\cos x}dx$　(1.2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\sin x}dx$　(1.3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

解答例 (1.1)　$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ となるので,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}dt = \int\left(-1+\frac{2(t+1)}{1+t^2}\right)dt \\
&= -t + 2\int\frac{t}{1+t^2}dt + 2\int\frac{1}{1+t^2}dt = -t+\log(1+t^2)+2\tan^{-1}t + C \\
&= -\tan\frac{x}{2} + \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + x + C \qquad (C\text{ は積分定数}).
\end{aligned}
$$

(1.2)　$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ となるので,

$$
I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{4t}{(1-t^2)(1+t)^2}dt = \int\frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}dt.
$$

$\dfrac{4t}{(1-t)(1+t)^3} = \dfrac{A}{1-t}+\dfrac{B}{1+t}+\dfrac{C}{(1+t)^2}+\dfrac{D}{(1+t)^3}$ とおく. 両辺に, $(1-t)(1+t)^3$ をかけると,

$$
4t = A(1+t)^3 + B(1-t)(1+t)^2 + C(1-t)(1+t) + D(1-t) \qquad ①
$$

となる[注3]. これは t についての恒等式[注4]なので, ① に $t=1$ を代入すると, $4=8A$. よって, $A=\frac{1}{2}$. ① に $t=-1$ を代入すれば, $D=-2$ がわかる. t^3 の係数を比較すれば, $0=A-B$ となる[注5]ので, $B=\frac{1}{2}$. ① に $t=0$ を代入すると, $0=A+B+C+D=\frac{1}{2}+B+C-2$, すなわち, $B+C=\frac{3}{2}$ を得る. $B=\frac{1}{2}$ より, $C=1$ である. よって,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1} + \int\frac{dt}{(t+1)^2} - 2\int\frac{dt}{(t+1)^3} \\
&= -\frac{1}{2}\log|t-1| + \frac{1}{2}\log|t+1| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(t+1)^2} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + \frac{1}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2} + C \qquad (C\text{ は積分定数}).
\end{aligned}
$$

(1.3) $\sqrt{x^2+2x+3}+x=t$ とおくと, $\sqrt{x^2+2x+3}=t-x$. 両辺を2乗して整理すると, $x=\frac{t^2-3}{2(t+1)}$ となる. これを t で微分すると, $\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}$. また, $\sqrt{x^2+2x+3}=t-x=t-\frac{t^2-3}{2(t+1)}=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)}$. よって,

$$
I_3 = \int\frac{\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}}{\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)}}dt = \int\frac{dt}{t+1} = \log|t+1|+C = \log(\sqrt{x^2+2x+3}+x+1)+C \quad (C\text{ は積分定数}).
$$

[注3]展開するのが面倒なので，今回はなるべく展開せずに済む方法で A, B, C, D を求めることにしてみましょう.
[注4]つまり，どんな t を代入しても成立する式，ということですね.
[注5]これは ① を全部展開しなくてもわかりますね.

$\boxed{2}$ 次の関数の不定積分を求めなさい.

(2.1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\tan\frac{x}{2}(1-\sin x)}dx$ (2.2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x-x^2}}$ (2.3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}+x}dx$

$\boxed{\text{解答例}}$ (2.1) $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ となるので,

$$I_1 = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{t(1-\frac{2t}{1+t^2})}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{-2(t-1)(t+1)}{t(t-1)^2(t^2+1)}dt = \int \frac{-2(t+1)}{t(t-1)(t^2+1)}dt.$$

$\dfrac{-2(t+1)}{t(t-1)(t^2+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{Ct+D}{t^2+1}$ とおく. 両辺に, $t(t-1)(t^2+1)$ を代入すると,

$$-2(t+1) = A(t-1)(t^2+1) + Bt(t^2+1) + t(t-1)(Ct+D).$$

これは t を複素数まで拡張して恒等式とみなすと, $t = 1, 0, i$ を代入したものから順に, $B = -2$, $A = 2$, $C = 0$, $D = 2$ が得られる. よって,

$$I_1 = 2\int\frac{dt}{t} - 2\int\frac{dt}{t-1} + 2\int\frac{dt}{t^2+1} = 2\log|t| - 2\log|t-1| + 2\tan^{-1}t + C = 2\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| + x + C \quad (C\text{ は積分定数}).$$

(2.2) $\sqrt{2-x-x^2} = \sqrt{(1-x)(x+2)} = (1-x)\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ より, $t = \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ とおく. $t^2 = \frac{x+2}{1-x}$ を x について解くと, $x = \frac{t^2-2}{1+t^2}$. これを t で微分して, $\frac{dx}{dt} = \frac{6t}{(1+t^2)^2}$ となる. よって,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{t^2-2}{1+t^2}\left(1-\frac{t^2-2}{1+t^2}\right)t}dt = \int \frac{2}{t^2-2}dt = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}}\right)dt \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\log|t+\sqrt{2}| - \log|t-\sqrt{2}|) + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}+\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}-\sqrt{2}}\right| + C \quad (C\text{ は積分定数}). \end{aligned}$$

(2.3) $\sqrt[4]{x} = t$ とおく. $x = t^4$ より, $\frac{dx}{dt} = 4t^3$. よって,

$$I_3 = \int \frac{t}{1+t^2+t^4}\cdot 4t^3dt = \int \frac{4t^4}{t^4+t^2+1}dt = 4\int\left(1 - \frac{t^2+1}{t^4+t^2+1}\right)dt$$

$t^4+t^2+1 = (t^2+t+1)(t^2-t+1)$ に注意して, $\dfrac{t^2+1}{t^4+t+1} = \dfrac{At+B}{t^2+t+1} + \dfrac{Ct+D}{t^2-t+1}$ の形に部分分数分解することを考える. 両辺に t^4+t^2+1 をかけると,

$$t^2+1 = (At+B)(t^2-t+1) + (Ct+D)(t^2+t+1)$$

となる. $t = i$ を代入すると, $0 = A - C + (-B+D)i$ であるから, $A = C$, $B = D$ を得る. $t = 0$ を代入すると $1 = B + D$ を得るので $B = D = \frac{1}{2}$ である. t^3 の係数を比較すると $A + C = 0$ を得るので, $A = C = 0$ である. よって,

$$\begin{aligned} I_3 &= 4t - 2\int\left(\frac{1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2-t+1}\right)dt = 4t - 2\int\left(\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dt \\ &= 4t - \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right) + C \\ &= 4\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

微分積分学 1　第 8 回 (2 枚目)

2015 年 6 月 8 日 (月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$　次の不定積分を求めなさい.

(1.1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

(1.2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(1.3)　$\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

$\boxed{\text{解答例}}$

(1.1)　$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ であるから,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} &= \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt \\ &= \int\frac{1}{1+t}dt=\log|1+t|+C=\log|1+\tan\frac{x}{2}|+C \qquad (C\text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

(1.2)　$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ であるから,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{3+\cos x} &= \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{1}{t^2+2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C \qquad (C\text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

(1.3)　$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ であるから,

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt.$$

ここで,

$$\frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}=\frac{at+b}{1+t^2}+\frac{c}{1+t}+\frac{d}{(1+t)^2}$$

とおいて, それぞれの係数を求めると, $a=0$, $b=2$, $c=0$, $d=-2$ を得る. よって,

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx &= \int\left\{\frac{2}{1+t^2}-\frac{2}{(1+t)^2}\right\}dt \\ &= 2\tan^{-1}t+\frac{2}{1+t}+C \\ &= x+\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C \qquad (C\text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の関数の不定積分を求めなさい.

(2.1) $\displaystyle\int x^3(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$

$\boxed{\text{解答例}}$

(2.1) $t = \sqrt{x+1}$ とおくと, $t^2 = x+1$. よって, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ であるから,

$$\begin{aligned}\int x^3(x+1)^{\frac{3}{2}}dx &= \int (t^2-1)^3 \cdot t^3 \cdot 2tdt = \int 2t^4(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1)dt = 2\left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{1}{3}t^9 + \frac{3}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5\right) + C \\ &= \frac{2}{11}(x+1)^{\frac{11}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{9}{2}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C \qquad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ.

(3.1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(3.3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{\text{解答例}}$

(3.1) $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$ とおくと, $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$ より,

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{1}{t - \frac{t^2-1}{2t+1}} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt = 2\int \frac{1}{2t+1}dt \\ &= \log|2t+1| = \log(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) + C \qquad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

(3.2) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ と変形する. $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ とおくと, $x = \frac{t^2-1}{1+t^2}$, $dx = \frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ であるから,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\frac{4t}{(1+t^2)^2}}{(1 - \frac{t^2-1}{1+t^2})t}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2\tan^{-1} t \\ &= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \qquad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

微分積分学1　第9回(1枚目)

2015年6月15日(月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$　次の定積分を求めなさい.

(1.1)　$\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$

(1.2)　$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}$

(1.3)　$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2-x^2}$

$\boxed{\text{解答例}}$

(1.1)　部分積分法により,

$$\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e (x)'\log x\,dx = [x\log x]_1^e - \int_1^e dx = e-(e-1) = 1.$$

(1.2)　被積分関数を部分分数分解する。$\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1}$ とおいて, 両辺に $x^2(x+1)$ をかけると,

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B.$$

係数を比較すると, $A=-1, B=1, C=1$ を得る。従って,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)} &= \int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[-\log x - \frac{1}{x} + \log(x+1)\right]_1^2 \\ &= \left(-\log 2 - \frac{1}{2} + \log 3\right) - (-1+\log 2) = \frac{1}{2} + \log 3 - 2\log 2.\end{aligned}$$

(1.3)　被積分関数は $\dfrac{1}{2-x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+x}\right)$ と部分分数分解できる。従って,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{2-x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}-x}+\frac{1}{\sqrt{2}+x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\log(\sqrt{2}-x)+\log(\sqrt{2}+x)\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めなさい.

(2.1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$

(2.2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx$

$\boxed{\text{解答例}}$

(2.1) 被積分関数を部分分数に分解するために, $\dfrac{1}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2} + \dfrac{Dx+E}{(1+x^2)^2}$ とおく。両辺に $x(1+x^2)^2$ を掛けて整理すると,

$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

を得る。これは x に関する恒等式であるから, 係数を比較すると $A=1, B=-1, C=0, D=-1, E=0$ を得る。従って, 部分分数分解

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

を得る。これを利用して,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)^2} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}\right) dx \\
&= \left[\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)}\right]_1^2 \\
&= \left(\log 2 - \frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 5 - \frac{3}{20}.
\end{aligned}$$

(2.2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi.$$

$\boxed{3}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して, $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n dx$ とおく。

(i) $n \geq 2$ に対して, $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$ であることを示せ。

(ii) (i) の結果を利用して, $\displaystyle\int_1^e (\log x)^4 dx$ を求めなさい。

$\boxed{\text{解答例}}$ (i) 部分積分を利用して,

$$I_n = \int (x)'(\log x)^n dx = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx = x(\log x)^n - nI_{n-1}.$$

(ii) $J_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n dx$ とおいて J_4 を求めればよい。(i) より,

$$J_n = [x(\log x)^n]_1^e - nJ_{n-1} = e - nJ_{n-1}.$$

この式を繰り返し用いる事で, 次の計算が成り立つ。

$$J_4 = e - 4J_3 = e - 4(e - 3J_2) = -3e + 12(e - 2J_1) = 9e - 24J_1.$$

$\boxed{1}$ の (1) より $J_1 = 1$. よって, $J_4 = 9e - 24$. これは $\displaystyle\int_1^e (\log x)^4 dx = 9e - 24$ を意味する。

微分積分学1　第9回(2枚目)

2015年6月15日(月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$ 次の定積分を求めなさい.

(1.1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \sin x\, dx$　　(1.2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x \tan^{-1} x dx$

(1.3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$　　(1.4) $I_4 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ (但し, m, n は自然数とする.)

$\boxed{\text{解答例}}$ (1.1) $I_1 = \left[-\dfrac{\cos^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{1}{5}\left(\cos^5 \dfrac{\pi}{3} - 1\right) = \dfrac{31}{160}.$

(1.2) $I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)' \tan^{-1} x dx = \left[\dfrac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x\right]_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)\dfrac{1}{x^2+1} dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}.$

(1.3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}.$

(1.4) $I_4 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2nx}{2n} + x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}.$

$\boxed{2}$ (1) 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して, 次の (A), (B) を示しなさい.

(A) $f(x)$ が偶関数のとき, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$　　(B) $f(x)$ が奇関数のとき, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

(2) 次の定積分を計算せよ.

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx, \qquad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin x dx, \qquad I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx$$

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) (A) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx.$

第1項目の積分において, $-x = t$ と変数変換すると,

$$\int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_0^a f(t)dt$$

となるので, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ を満たす.

(B) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx.$ (A) より, $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_0^a f(t)dt$ であるから, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ を満たす.

(2) 偶関数の積分であるから, $I_1 = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx = 4.$

また, 奇関数の積分なので, $I_2 = 0.$

I_3 は偶関数の積分なので, $I_3 = 2\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx = 2\int_0^{\pi} x(\sin x)' dx = 2[x\sin x]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin x dx = -4.$

$\boxed{3}$ (1) $[0,\pi]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して，$\displaystyle\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ と分割し，変数変換 $x = \pi - t$ を用いて次の等式を示しなさい.

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$$

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ を計算せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) 問題の指示にあるように計算していくと,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))(-dt) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$ とみなせば, $I = \displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ の形をしている. 従って,

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\left[-\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\tan^{-1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$(\tan^{-1} f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$ なので, $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx = \tan^{-1} f(x)$ が成り立つのがわかりますね.

$\boxed{4}$ 定積分 $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を計算せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (定石に従い $\sqrt{x^2+1} + x = t$ とおいても計算できますが，別のやり方をしてみましょう[注 6].)

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{x(x^2+1) - x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \int_1^2 (x\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_1^2 \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3} - (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \\
&= \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

[注 6] 定石は，あくまでも定石であって，それよりも簡単に解ける方法がある場合ももちろんあるのです.

微分積分学1　第10回

2015年6月22日 (月曜日)　　担当：新國裕昭

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　名前

$\boxed{1}$　次の広義積分の値を求めよ．

(1.1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

(1.2) $\displaystyle\int_0^{1} x\log x dx$

(1.3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

(1.4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

解答例

(1.1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} xe^{-x}dx &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} xe^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} x(-e^{-x})'dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left\{[-xe^{-x}]_0^{\beta} + \int_0^{\beta} e^{-x}dx\right\}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left(-\beta e^{-\beta} - e^{-\beta} + 1\right) = 1.\end{aligned}$$

(1.2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\log x dx &= \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 x\log x dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x dx\\ &= \lim_{\alpha\to+0}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{1}{2}x dx\right\}\\ &= \lim_{\alpha\to+0}\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\log\alpha - \frac{1-\alpha^2}{4}\right\}\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ここで，ロピタルの定理より，

$$\lim_{\alpha\to+0}\alpha^2\log\alpha = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\log\alpha}{\frac{1}{\alpha^2}} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\frac{1}{\alpha}}{-2\frac{1}{\alpha^3}} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha^2}{-2} = 0$$

を用いた．

(1.3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \lim_{\alpha\to+0}\left[2\sqrt{\sin x}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\alpha\to+0}(2-2\sqrt{\sin\alpha}) = 2.$$

(1.4)

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1}x\right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{2}$ 次の広義積分の値を求めよ.

(2.1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$ (2.2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$ (但し, $a>0, ac-b^2>0$ とする.)

(2.3) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ (2.4) $\displaystyle\int_0^3\frac{2x-3}{\sqrt{|x^2-3x+2|}}dx$

解答例

(2.1) $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$ とおく. $n>1$ を満たす自然数 n に対して,

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-3+2)x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-3)x\cos 2x+\cos(2n-3)x\sin 2x}{\sin x}dx\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-3)x}{\sin x}(1-2\sin^2 x)dx+2\int_0^{\pi}\cos x\cos(2n-3)xdx\\ &= I_{n-1}+2\int_0^{\pi}\cos(2n-2)xdx=I_{n-1}+2\Big[\frac{\sin(2n-2)x}{2n-2}\Big]_0^{\pi}=I_{n-1}.\end{aligned}$$

従って, $I_n=I_{n-1}=I_{n-2}=\cdots=I_1=\displaystyle\int_0^{\pi}1dx=\pi.$

(2.2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a(x+\frac{b}{a})^2+\frac{ac-b^2}{a})^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[\frac{ac-b^2}{a}\{\frac{a^2}{ac-b^2}(x+\frac{b}{a})^2+1\}]^n}.$$

$\frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}(x+\frac{b}{a})=t$ とおくと,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[\frac{ac-b^2}{a}\{\frac{a^2}{ac-b^2}(x+\frac{b}{a})^2+1\}]^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}}{\{\frac{ac-b^2}{a}(t^2+1)\}^n}dt=\frac{a^{n-1}}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

$I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ とおくと,

$$\begin{aligned}I_n &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}dt-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^n}dt\\ &= I_{n-1}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{2}\left(\frac{1}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}}\right)'dt=I_{n-1}+\frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.\end{aligned}$$

これを繰り返し用いると, $I_n=\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}I_1=\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi$ を得る. 従って,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}=\frac{a^{n-1}}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi.$$

(2.3) $\sqrt{x^2-1}+x=t$ とおくと, $x=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$, $\sqrt{x^2-1}=t-x=\dfrac{t^2-1}{2t}$. また, x が α から 2 まで動く時, t は $\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha$ から $2+\sqrt{3}$ まで動く. 従って,

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{\alpha\to1+0}\int_{\alpha}^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\alpha\to1+0}\int_{\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha}^{2+\sqrt{3}}\frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}dt\\ &= \lim_{\alpha\to1+0}\int_{\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha}^{2+\sqrt{3}}\frac{dt}{t}=\lim_{\alpha\to1+0}(\log(2+\sqrt{3})-\log(\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha))=\log(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

(2.4) 積分区間 $[0,3]$ において, $0\le x\le 1$ または $2\le x\le 3$ の時, $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$. また, $1\le x\le 2$ の時, $|x^2-3x+2|=-x^2+3x-2$ であるから, 積分区間を次のように 3 つに分けて計算する.

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{2x-3}{\sqrt{|x^2-3x+2|}}dx &= \int_0^1\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx+\int_1^2\frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx+\int_2^3\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx\\ &= \Big[2\sqrt{x^2-3x+2}\Big]_0^1+\Big[-2\sqrt{-x^2+3x-2}\Big]_1^2+\Big[2\sqrt{x^2-3x+2}\Big]_2^3\\ &= -2\sqrt{2}+0+2\sqrt{2}=0.\end{aligned}$$