

- 1** 実数の数列 $\{a_n\}$ を $a_3 = 24, a_6 = 192$ である等比数列とする。また、数列 $\{b_n\}$ を条件

$$b_1 = 3, b_2 = 16, b_{n+2} - 12b_{n+1} + 32b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められる数列とする。次の問いに答えなさい。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。
- (2) $b_{n+2} - \alpha b_{n+1} = \beta(b_{n+1} - \alpha b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たす定数 α, β の組を 2 組求めなさい。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。
- (4) 不等式 $b_n < 400a_n$ を満たす最大の n の値を求めなさい。

- 2** 空間内に四面体 $OABC$ がある。辺 AB の中点を D , 辺 BC を $2:1$ に内分する点を E , 線分 AE と線分 CD の交点を F とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (2) $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (3) $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (4) $|\overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{AF}|$ のとき、 $|\vec{a}|^2$ を $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (5) $|\overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{AF}|$ のとき、 $\angle OAB = 90^\circ$ であるための必要十分条件は $\angle AOC = 90^\circ$ であることを示しなさい。

3 2つの関数

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

を考える。 xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし、曲線 $y = g(x)$ を C_2 とする。次の問いに答えなさい。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) すべての実数 x について、不等式 $e^x \geq 1 + x$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ が成り立ち、 $x < 0$ のとき $f(x) < g(x)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) a を正の実数とする。2曲線 C_1, C_2 と直線 $x = a$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とし、2曲線 C_1, C_2 と直線 $x = -a$ によって囲まれた部分の面積を $T(a)$ とする。このとき、不等式 $T(a) < S(a)$ が成り立つことを示しなさい。

4 関数

$$f(x) = \frac{81x^8}{(x^3 + 4)^4} \quad (x \neq -\sqrt[3]{4})$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めなさい。
- (2) 導関数 $f'(x)$ を求め、 $f'(x) = 0$ を満たす実数 x の値をすべて求めなさい。
- (3) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べて、そのグラフの概形をかきなさい。ただし、凹凸は調べなくてよい。
- (4) a は $a > 4$ を満たす実数とし、 $I(a) = \int_0^{\sqrt[3]{a-4}} f(x)dx$ とする。 $I(a)$ の値を a を用いて表しなさい。
- (5) (4) の $I(a)$ について、極限 $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ を求めなさい。