2026 年度 前橋工科大学 一般選抜〔前期日程〕・帰国生徒・私費外国人留学生 個別学力検査〔数学〕出題意図および解答例

各問の出題意図は以下の通りである.

$\boxed{1}$ 極限，微分，積分についての基本的な公式の知識，および具体的な計算を効率的かつ正確に実行する能力を問う.

$\boxed{2}$ 数列の和の式を活用し，一般項を求める能力を問う．また，無限級数の和の意味を理解し，極限を用いて無限級数の和を求める能力を有するか否かを問う.

$\boxed{3}$ 空間ベクトルと三角関数の知識を活用して，空間内の点や平面の位置関係を把握する能力，および三角形の面積を求める能力を問う.

$\boxed{4}$ 微分法を用いて，関数の増減・凹凸を調べグラフの概形を描く能力，および接線の方程式を求める能力を問う．また，積分法を用いて，図形の面積を計算する能力を問う.

各問の解答例を次頁以降に記す．数学の問題に対する解答は 1 通りではなく，本学は，問題に対する答えそのものよりも，その答えを導く過程が重要であると考える．以下に示すものは，あくまでも解答の 1 例であり，答えを導く過程を限定するものではないことに留意する.

$\boxed{1}$

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\cos 3x}\right)\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)=\frac{3}{5}\times 1\times 1\times 1=\underline{\frac{3}{5}}.$

(2) $$f'(x)=\frac{(1-3x)'(x^2+2)-(1-3x)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=\frac{-3(x^2+2)-2x(1-3x)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\underline{\frac{3x^2-2x-6}{(x^2+2)^2}}.$$

(3) $$f'(x)=\frac{(1+\sin^2 3x)'}{1+\sin^2 3x}=\frac{(2\sin 3x)\cdot(\sin 3x)'}{1+\sin^2 3x}=\frac{(2\sin 3x)\cdot\{(\cos 3x)\cdot(3x)'\}}{1+\sin^2 3x}$$
$$=\underline{\frac{6\sin 3x\cos 3x}{1+\sin^2 3x}}.$$

(4) $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{7x+1}}=\int_0^1(7x+1)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{14}\left[(7x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{14}(8^{\frac{2}{3}}-1^{\frac{2}{3}})=\underline{\frac{9}{14}}.$$

(5) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x(1-\sin^2 x)dx$ とおく．$\sin x=t$ とおくと，$\cos xdx=dt$．

また，x が 0 から $\dfrac{\pi}{6}$ まで動くとき，t は 0 から $\dfrac{1}{2}$ まで動く．

したがって，$\displaystyle I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t^2)dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{11}{24}}.$

$\boxed{2}$

(1) $a_1 = S_1 = 3\left(1 + \dfrac{3}{2} + 2 - \dfrac{3}{4}\right) = 3 \cdot \dfrac{15}{4} = \underline{\dfrac{45}{4}}.$

(2) $n \geqq 2$ に対し,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + 2n - \frac{3}{4}\right) - 3^{n-1}\left\{(n-1)^3 + \frac{3}{2}(n-1)^2 + 2(n-1) - \frac{3}{4}\right\} \\ &= 3^{n-1}\left\{3n^3 + \frac{9}{2}n^2 + 6n - \frac{9}{4}\right. \\ &\qquad\qquad \left. -(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - \frac{3}{2}(n^2 - 2n + 1) - 2(n-1) + \frac{3}{4}\right\} \\ &= 3^{n-1}(2n^3 + 6n^2 + 4n) \\ &= \underline{2n(n+1)(n+2) \cdot 3^{n-1}} \end{aligned}$$

と表される.

(3) $n \geqq 2$ に対し, (2) より

$$\frac{\frac{3}{2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3^n}{a_n} = \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{\beta}{(n+1)(n+2)} = \frac{(\alpha+\beta)n + 2\alpha}{n(n+1)(n+2)}$$

を満たす α, β の組を求めればよい. よって, $\alpha+\beta = 0,\ 2\alpha = \dfrac{3}{2}$ を解いて, $\underline{(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)}$ を得る.

(4) (3) より, $n \geqq 2$ に対して,

$$\frac{3^n}{a_n} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

が成り立つ. よって, (1) より, $n \geqq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{a_k} &= \frac{3}{\frac{45}{4}} + \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\ &= \frac{4}{15} + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} = \frac{47}{120} - \frac{3}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{47}{120} - \frac{3}{4(n+1)(n+2)}\right\} = \underline{\frac{47}{120}}.$$

$\boxed{3}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{3}{4}\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix} + \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}9\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$. よって，$\underline{\mathrm{D}(0,-1,4)}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$.

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+4^2} = \underline{\sqrt{34}}$.

(3) 点 $\mathrm{P}(2\sqrt{3}\cos\theta, 2\sin\theta, 1)$ が平面 α 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （s, t は実数）と表される.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix}3-6s+6t\\2-4s\\6s-2t\end{pmatrix}$ なので，次が成り立つ.

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\theta = 3-6s+6t & \cdots ① \\ 2\sin\theta = 2-4s & \cdots ② \\ 1 = 6s-2t & \cdots ③ \end{cases}$$

②，③より，$s = \dfrac{1}{2}(1-\sin\theta)$，$t = \dfrac{1}{2}(2-3\sin\theta)$．これらを①に代入して，

$$2\sqrt{3}\cos\theta = 3 - 3(1-\sin\theta) + 3(2-3\sin\theta)$$
$$6\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta = 6$$
$$2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = 3$$
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$ なので，$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2}{3}\pi$．よって，$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}}$.

(4) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $2\sqrt{3}\cos\theta = 3$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $2\sqrt{3}\cos\theta = 0$．よって，(3) の交点で x 座標が最大となるのは $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときなので，$\mathrm{E}(3,1,1)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \sqrt{34}$（$\because$ (2) より），

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (-3)\cdot 0 + (-3)\cdot(-1) + 4\cdot 1 = 7$．よって，

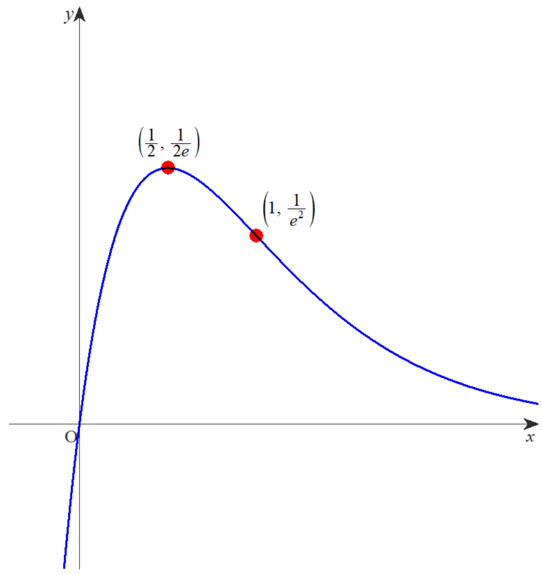
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34\cdot 2 - 7^2} = \underline{\frac{\sqrt{19}}{2}}.$$

$\boxed{4}$

(1) $$\int f(x)dx = \int x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)' dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \int (x)'\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$$
$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \underline{-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数}).}$$

(2) $f'(x) = (x)'e^{-2x} + x(e^{-2x})' = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$,
$f''(x) = (1-2x)'e^{-2x} + (1-2x)(e^{-2x})' = -2e^{-2x} + (1-2x)(-2e^{-2x}) = 4(x-1)e^{-2x}$.
また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
したがって，$f(x)$ の増減表とグラフは下記のようになる：

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↱	$\frac{1}{2e}$	↴	$\frac{1}{e^2}$	↳	(0)



(3) ℓ は傾き $f'(1) = -\frac{1}{e^2}$ をもち，点 $\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$ を通るから，ℓ の方程式は $\underline{y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}}$.

(4) $x < 1$ のとき C は上に凸なので，$x < 1$ の範囲で ℓ は C よりも上側にある．したがって，(1) より
$$S = \int_0^1 \left\{\left(-\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}\right) - xe^{-2x}\right\}dx = \left[-\frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{2}{e^2}x\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{2}{e^2}\right) - \left(-\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{9}{4e^2} - \frac{1}{4}}.$$