前橋工科大学 2025 年度 一般選抜〔前期日程〕入学試験（数学）
出題意図および解答例

各問の出題意図は以下の通りである。

$\boxed{1}$ 等比数列や 3 項間漸化式を満たす数列の一般項を求める能力を問う。また、2 次不等式の知識を数列の問題の中で活用する能力を問う。

$\boxed{2}$ 1 次独立性や内積などのベクトルに関する基本的知識を問う。また、空間内の立体を把握するためにこれらを活用する能力、および計算する能力を問う。

$\boxed{3}$ 微分法を用いた不等式の証明の基礎的な理解を問う。また、それを積分の不等式へ応用する能力を問う。

$\boxed{4}$ 漸近線や極限に留意して、微分法によって関数のグラフをかく能力を問う。また、積分法を活用し、面積を求める能力を問う。

各問の解答例を次頁以降に記す。数学の問題に対する解答は 1 通りではなく、本学は、問題に対する答えそのものよりも、その答えを導く過程が重要であると考える。以下に示すものは、あくまでも解答の 1 例であり、答えを導く過程を限定するものではないことに留意する。

$\boxed{1}$

(1) $a_n = ar^{n-1}$ とすると，

$$a_3 = ar^2 = 24 \ \cdots ①, \quad a_6 = ar^5 = 192 \ \cdots ②.$$

①, ②より $r^3 = 8$．ここで，r は実数なので $r = 2$．これを①に代入して $a = 6$．
よって，$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$．　$\therefore \underline{a_n = 3 \cdot 2^n}$.

(2) 求める α, β は $t^2 - 12t + 32 = 0$ の解である．
よって，これを解くと，$(t-4)(t-8) = 0$ より $t = 4, 8$．　$\therefore \underline{(\alpha, \beta) = (4, 8), (8, 4)}$.

(3) (2) より，

$$b_{n+2} - 4b_{n+1} = 8(b_{n+1} - 4b_n) \ \cdots ③, \quad b_{n+2} - 8b_{n+1} = 4(b_{n+1} - 8b_n) \ \cdots ④.$$

③より，$\{b_{n+1} - 4b_n\}$ は初項 $b_2 - 4b_1 = 16 - 4 \cdot 3 = 4$，公比 8 の等比数列なので，

$$b_{n+1} - 4b_n = 4 \cdot 8^{n-1} = 2^{3(n-1)+2} = 2^{3n-1} \ \cdots ⑤.$$

④より，$\{b_{n+1} - 8b_n\}$ は初項 $b_2 - 8b_1 = 16 - 8 \cdot 3 = -8$，公比 4 の等比数列なので，

$$b_{n+1} - 8b_n = -8 \cdot 4^{n-1} = -2^{2(n-1)+3} = -2^{2n+1} \ \cdots ⑥.$$

⑤, ⑥より $4b_n = 2^{3n-1} + 2^{2n+1}$．　$\therefore \underline{b_n = 2^{3n-3} + 2^{2n-1}}$.

(4) (1),(3) の結果を $b_n < 400a_n$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
2^{3n-3} + 2^{2n-1} &< 400 \cdot 3 \cdot 2^n \\
\frac{1}{8} \cdot 2^{2n} + \frac{1}{2} \cdot 2^n &< 1200 \\
2^{2n} + 4 \cdot 2^n - 9600 &< 0 \\
t^2 + 4t - 9600 &< 0 \quad (t = 2^n \text{ とおく}) \\
(t+100)(t-96) &< 0 \\
\therefore -100 < t &< 96
\end{aligned}$$

このとき，$t = 2^n > 0$ より $0 < 2^n < 96$ であり，$2^6 = 64 < 96 < 128 = 2^7$ より $1 \leqq n \leqq 6$．ゆえに，求める n の値は $\underline{n = 6}$.

$\boxed{2}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \dfrac{1}{2}\{(\vec{a} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c})\} = \underline{\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}}.$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a}) + \dfrac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \underline{-\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}}.$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ （s は実数）とおける。したがって，(1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{c} + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{s}{2}\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} + (1-s)\vec{c} \quad \cdots ①.$$

一方で，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ （t は実数）とおける。したがって，(2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{a} + t\left(-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{c} \quad \cdots ②.$$

4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないので，①, ② の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数を比較して，
$\dfrac{s}{2} = 1 - t$, $\dfrac{s}{2} = \dfrac{t}{3}$, $1 - s = \dfrac{2}{3}t$ を得る。よって，$s = \dfrac{1}{2}$, $t = \dfrac{3}{4}$.
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \underline{\dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}}.$

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AF}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$.
よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を得て，(3) より
$|\vec{a}|^2 = 2\vec{a} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) = \dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \dfrac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
$\therefore \underline{|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}}.$

(5) (4) の結果より，$\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{c}$ であるから，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{OAB} = 90^\circ \quad &\iff \quad \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \quad \iff \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 0 \\ &\iff \quad \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \quad \iff \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ &\iff \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \quad \iff \quad \angle\mathrm{AOC} = 90^\circ.\end{aligned}$$

したがって，$\angle\mathrm{OAB} = 90^\circ$ であることと $\angle\mathrm{AOC} = 90^\circ$ であることは同値である。

$\boxed{3}$

(1) $h(x) = e^x - (1+x)$ とおく。$h'(x) = e^x - 1$ ゆえ、$h'(0) = 0$. また $h(0) = 0$ より、増減表は

x		0	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって $h(x) \geqq 0$ (等号成立は $x = 0$) ゆえ、示された。

(2) $k(x) = f(x) - g(x) = e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)$ とおく。$k'(x) = e^x - (1+x)$ ゆえ、(1) より、$k'(0) = 0$ であり、 $x \neq 0$ で $k'(x) > 0$. また $k(0) = 0$ より、増減表は

x		0	
$k'(x)$	$+$	0	$+$
$k(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

よって $x > 0$ のとき $k(x) > 0$, $x < 0$ のとき $k(x) < 0$ が成り立つため、示された。

(3) $U(a) = S(a) - T(a)$ とおく。

$$\begin{aligned}
U(a) &= \int_0^a (f(x) - g(x))dx - \int_{-a}^0 (g(x) - f(x))dx = \int_{-a}^a (f(x) - g(x))dx \\
&= \int_{-a}^a \left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[e^x - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_{-a}^a \\
&= e^a - e^{-a} - 2a - \frac{1}{3}a^3.
\end{aligned}$$

以後 a の関数 $U(a)$ は実数全体で定義された関数として扱う。微分すると

$$\begin{aligned}
&U'(a) = e^a + e^{-a} - 2 - a^2, \\
&U''(a) = e^a - e^{-a} - 2a, \\
&U'''(a) = e^a + e^{-a} - 2 = \left(e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

$a > 0$ で $U'''(a) > 0$ なので、$a \geqq 0$ で $U''(a)$ は増加、かつ $U''(0) = 0$ より $U''(a) > 0$.
$\therefore$ $a > 0$ で $U''(a) > 0$ なので、$a \geqq 0$ で $U'(a)$ は増加、かつ $U'(0) = 0$ より $U'(a) > 0$.
$\therefore$ $a > 0$ で $U'(a) > 0$ なので、$a \geqq 0$ で $U(a)$ は増加、かつ $U(0) = 0$ より $U(a) > 0$.
よって示された。

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{81}{\left(x+\frac{4}{x^2}\right)^4} = \underline{0}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{81}{\left(x+\frac{4}{x^2}\right)^4} = \underline{0}$.

(2) $\displaystyle f'(x) = 81\cdot\frac{8x^7(x^3+4)^4 - x^8\cdot 4(x^3+4)^3\cdot 3x^2}{(x^3+4)^8} = \frac{324x^7\{2(x^3+4)-3x^3\}}{(x^3+4)^5} = \frac{324x^7(8-x^3)}{(x^3+4)^5}$

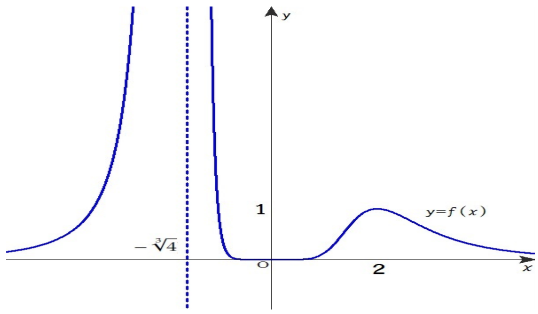
より, $f'(x) = 0 \iff \underline{x = 0, 2}$.

(3) 増減表

x		$-\sqrt[3]{4}$		0		2	
$f'(x)$	$+$	なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	なし	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

と (1) および $\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt[3]{4}} f(x) = +\infty$

より,



(4) $x^3+4=t$ とおくと, $3x^2dx = dt$. また, $0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{a-4}$ より $4 \leqq t \leqq a$ であるから,

$$\begin{aligned} I(a) &= 27\int_4^a \frac{(t-4)^2}{t^4}dt = 27\int_4^a \left(\frac{1}{t^2} - \frac{8}{t^3} + \frac{16}{t^4}\right)dt = 27\left[-\frac{1}{t} + \frac{4}{t^2} - \frac{16}{3t^3}\right]_4^a \\ &= 27\left\{\left(-\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} - \frac{16}{3a^3}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)\right\} = \underline{27\left(-\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} - \frac{16}{3a^3} + \frac{1}{12}\right)}. \end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a) = \frac{27}{12} = \underline{\frac{9}{4}}$.