

1 次の小問にそれぞれ答えなさい。ただし、 $\log x$ は x の自然対数を表す。

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ を求めなさい。
- (2) 関数 $f(x) = \frac{1-3x}{x^2+2}$ を微分しなさい。
- (3) 関数 $f(x) = \log(1 + \sin^2 3x)$ を微分しなさい。
- (4) 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{7x+1}}$ を求めなさい。
- (5) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x dx$ を求めなさい。

2 n を自然数とする。初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 3^n \left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + 2n - \frac{3}{4} \right)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) a_1 の値を求めなさい。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 a_n を n を用いて表しなさい。
- (3) $n \geq 2$ のとき、

$$\frac{3^n}{a_n} = \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{\beta}{(n+1)(n+2)}$$

を満たす定数 α, β の組 (α, β) を求めなさい。

- (4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{a_n}$ の和を求めなさい。

3 座標空間内の 3 点 $A(3, 2, 0)$, $B(-3, -2, 6)$, $C(9, 2, -2)$ を通る平面を α とする。線分 BC を $1:3$ に内分する点を D とする。次の問いに答えなさい。

- (1) 点 D の座標を求めなさい。
- (2) $|\overrightarrow{AD}|$ を求めなさい。
- (3) θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で動かしたとき、点 $P(2\sqrt{3}\cos\theta, 2\sin\theta, 1)$ が描く曲線を γ とする。点 P が平面 α と曲線 γ の交点であるときの θ の値をすべて求めなさい。
- (4) (3) の交点で x 座標が最大のもを E とする。 $\triangle ADE$ の面積 S を求めなさい。

4 関数 $f(x)$ を $f(x) = xe^{-2x}$ とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。曲線 C 上の点 $(1, e^{-2})$ における接線を l とする。次の問いに答えなさい。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めなさい。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の増減、曲線 C の凹凸を調べ、 C の概形をかきなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ は用いてよい。
- (3) 接線 l の方程式を求めなさい。
- (4) 曲線 C , 直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。