

## 線形代数 II

このノートは、線形代数 II で学ぶ定義・定理をまとめたものである。それらを理解するための例や例題は授業中に紹介することを想定しているので、重要な例であってもほとんど書いていません。このノートだけで理解してもらうことを予定していないので、授業にはきちんと参加してください。このノートには、授業中に証明を省略する定理の証明のみを載せる予定ですが、授業中にやる定理の証明も少し加えています。

### 1 ベクトル空間

$\mathbb{K}$  は  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  のどちらか一方に定めて議論する、ということの意味するものとする (一度どちらか一方に定めた後は途中で変えずに議論を進める)。

**定義 1.1.** (ベクトル空間)  $V$  を空集合でない集合とし、次の条件を満たす演算が定義されているとする:

- ① 【加法】 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$  が成り立つ。
- ② 【スカラー倍】 任意の  $\mathbf{u} \in V$  と  $c \in \mathbb{K}$  に対して  $c\mathbf{u} \in V$  が成り立つ。

また、任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  と  $a, b \in \mathbb{K}$  に対して次の (1)~(8) が成り立つとする。

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$                        | (2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ |
| (3) ある $\mathbf{o} \in V$ が存在して、 $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$ が成り立つ。 | (4) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$   |
| (5) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$                            | (6) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$                          |
| (7) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$   | (8) $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$  |

このとき、 $V$  は  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間であるという。また、 $V$  の要素をベクトルと呼ぶ。

**例 1.** (ベクトル空間の例)

(1) 数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間となる。

**証明.** 定義 1.1 の (1)~(8) は成り立つ事は通常の場合は明らかであるから、①,② をチェックする。

① について

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  を任意にとると、 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  ( $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$  は実数) の形をしている。

よって、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$  となり、各成分は実数となるから、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  であることがわかる。

② について

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  と  $c \in \mathbb{R}$  を任意にとる<sup>(注1)</sup>。このとき、 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  ( $u_1, u_2, \dots, u_n$  は実数) と表せるので  $c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$  となつて、各成分は実数であることから、 $c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  となる。

□

(注1) いま、 $\mathbb{R}^n$  が  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間であることを示そうとしているのだから、 $\mathbb{K}$  として  $\mathbb{R}$  を選択している状況である。

(2)  $\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間ではない. 理由は, 定義 1.1 の ② が成り立たなくなるからである. (1) において  $c \in \mathbb{C}$  とした場合を考えてみられるとよいであろう. 実数を成分とする  $(m, n)$  行列全体の集合  $M_{mn}(\mathbb{R})$  や区間  $I$  上の実数値連続関数全体の集合  $C(I; \mathbb{R})$  は同様の理由で  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間にはならない.

(3)  $\mathbb{C}^n$  は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間であるし,  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間でもある.

(4)  $n$  次以下の実数係数多項式全体の集合  $\mathbb{R}_n[x]$ , 成分を実数にもつ  $(m, n)$  行列全体の集合  $M_{mn}(\mathbb{R})$ , 区間  $[a, b]$  上の実数値連続関数全体の集合  $C([a, b]; \mathbb{R})$  などは  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間となる.

(5) 集合  $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3$  は, 要素はベクトルからなるものの,  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間でも  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間でもない.  $\mathbb{R}^2$  の要素と  $\mathbb{R}^3$  の要素は加えることができないからである.

(6)  $\{\mathbf{0}\}$  (零ベクトルのみからなる集合) は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間でもあるし,  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間でもある.

**定義 1.2.** (部分空間)  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とし,  $W$  を  $V$  の空集合でない部分集合  $W$  とする. 任意の  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$  に対して  $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \in W$  が成立するとき,  $W$  は  $V$  の部分空間であるという.

$\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  の部分空間  $W$  はまた,  $V$  に定義された和とスカラー倍に関して  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間となることに注意する.  $V$  は  $V$  の部分空間であることは容易に分かる. したがって, 以下で単に  $V$  の部分空間  $W$  を考える, と書いた時には,  $V$  そのものも考察対象になっていることに注意する.

**定義 1.3.** (一次独立)  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  に対して,  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  (但し,  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$  とする) ならば,  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  を満たすとき,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次独立であるという<sup>(注2)</sup>.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  が一次独立でないとき,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次従属であるという.

**定理 1.4.** (基本変形による一次独立・一次従属性の保存)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{K}^n$  を用いて  $n$  行  $r$  列の行列  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_r), B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_r)$  を考える. 基本変形によって  $A \rightarrow B$  となると仮定する. このとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1)  $\mathbf{b}_r = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_{r-1}\mathbf{b}_{r-1}$  ( $c_1, c_2, \dots, c_{r-1}$  は定数) ならば,  $\mathbf{a}_r = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_{r-1}\mathbf{a}_{r-1}$  である.
- (2)  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  が一次独立ならば,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  も一次独立である.

**定理 1.5.** (一次独立の判定 1)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^n$  を用いて  $n$  次正方行列  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$  を考える. このとき, 次の (1), (2) は同値である.

- (1)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次独立である.
- (2)  $|A| \neq 0$  である.

**定理 1.6.** (一次独立の判定 2)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{K}^n$  を用いて  $n$  行  $r$  列の行列  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_r)$  を考える. このとき, 次の (1), (2) は同値である.

- (1)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  は一次独立である.
- (2)  $\text{rank } A = r$  である.

**定義 1.7.** (基底)  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  内のベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  について

- ①  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  は一次独立である.
- ②  $V$  内の任意のベクトル  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  の一次結合として表される. すなわち,  $V$  内の任意のベクトル  $\mathbf{v}$  に対して  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$  をみたす定数  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$  が存在する.

<sup>(注2)</sup> この言い回しは数学ではよくなされる表現であるのだが, 試験で定義を書いてもらうと, 少し理解がしにくい表現と感じているように思える. そこで, 次のように言い換えても構わない:

①  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  に対して,  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  をみたす  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$  が  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  以外に存在しないとき,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次独立であるという.

②  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  に対して,  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  をみたす  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$  は  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  のみであるとき,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次独立であるという.

の2条件をみたすとき,  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  を  $V$  の基底という.

**定理 1.8.**  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  内のベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  に対して,

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \{c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

とおくと, 集合  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$  は  $V$  の部分空間となる.  $V$  の部分空間  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$  をベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  が生成する空間という.

この定理を用いると, 基底の定義の条件②は,  $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$  と書き換えられることがわかる. ひとつのベクトル空間に対して基底は何通りも存在するが, 次のことが知られている.

**定理 1.9.**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする. このとき,  $V$  の基底をなすベクトルの個数は一定である.

従って, 次の定義をすることができる.

**定義 1.10.** (次元)  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  の基底をなすベクトルの個数を  $V$  の次元といい,  $\dim V$  と表す. 基底が有限個のベクトルからなるとき,  $V$  を有限次元ベクトル空間という.  $\dim V = n$  であるとき,  $V$  は  $n$  次元ベクトル空間という. また,  $V = \{\mathbf{o}\}$  のとき,  $V$  は  $0$  次元と定める.

次に有限次元ベクトル空間において基底の定義を緩める定理に向けて準備をする.

**補題 1.11.**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とし,  $V$  内の  $n$  個のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  と  $r$  個のベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  を考える,  $n > r$  であり,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  のそれぞれのベクトルが  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  の一次結合で表せるならば,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次従属である.

この補題を用いると, 次の定理が証明できる.

**定理 1.12.**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次元ベクトル空間とする. このとき,  $V$  の  $n$  個の一次独立なベクトルの組  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  は  $V$  の基底となる.

この定理によれば, 次元がはじめからわかっているベクトル空間 ( $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[x]$  など) の場合は, その次元の個数と同じだけの一次独立なベクトルを集めるだけで基底であることを確かめることができるのである. 次に, 次元に関する公式を学ぶ.

**定義 1.13.** (積空間)  $W_1, W_2$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  の部分空間とする. このとき,  $W_1 \cap W_2$  を  $W_1$  と  $W_2$  の積空間とよぶ.

**定義 1.14.** (和空間)  $W_1, W_2$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  の部分空間とする. このとき,

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

を  $W_1$  と  $W_2$  の和空間とよぶ.

$\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  の部分空間  $W_1, W_2$  に対して, 積空間  $W_1 \cap W_2$  と和空間  $W_1 + W_2$  は  $V$  の部分空間となる (部分空間についての理解が深まるため, 演習問題として各自証明を試みよ).

**定理 1.15.**  $W_1, W_2$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$  の有限次元部分空間とする. このとき,

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

が成り立つ.

## 2 線形写像

**定義 2.1.** (写像) 各  $a \in A$  に対して  $b \in B$  をただひとつに定める規則  $f$  が存在するとき,  $f$  は  $A$  から  $B$  への写像といい,  $f: A \rightarrow B, b = f(a)$  と表す.

**定義 2.2.** (線形写像)  $U, V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする. 写像  $f: U \rightarrow V$  が

- ① 任意の  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$  に対して  $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2)$  が成り立つ.
- ② 任意の  $\mathbf{u} \in U, c \in \mathbb{K}$  に対して  $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$  が成り立つ.

の2条件をみたすとき,  $f$  は線形写像であるという.

線形写像の条件 ①, ② は次の条件にまとめてひとつにすることができる:

- 任意の  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$  に対して,  $f(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2) = c_1f(\mathbf{u}_1) + c_2f(\mathbf{u}_2)$  が成り立つ.

**定義 2.3.**  $U, V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする. 線形写像  $f: U \rightarrow V$  に対して,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \text{ をみたす } \mathbf{u} \in U \text{ が存在する}\}, \\ \ker f &= \{\mathbf{u} \in U \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\} \end{aligned}$$

を順に  $f$  の像,  $f$  の核と呼ぶ.

**定理 2.4.** (次元公式)  $U, V$  を  $\mathbb{K}$  上の有限次元ベクトル空間とする. このとき, 線形写像  $f: U \rightarrow V$  に対して,

$$\dim U = \dim \text{Im } f + \dim \ker f$$

が成り立つ.

### 3 内積空間

**定義 3.1.** ( $\mathbb{R}$  上のベクトル空間の内積)  $V$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とする. 各  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して実数  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を対応させる写像が存在して, 次の (1)~(3) を満たすとき,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の内積という.

(1) (双線形性)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, c \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ.

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, c\mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

(2) (対称性)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$  が成り立つ.

(3) (正定値性)  $\mathbf{x} \in V$  に対して,  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$  が成り立つ. 等号成立は  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  のみ.

複素数  $c = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) に対して,  $\bar{c} = a - bi$  を  $c$  の共役な複素数と呼んでいたことを思い出そう.

**定義 3.1'.** ( $\mathbb{C}$  上のベクトル空間の内積)  $V$  を  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間とする. 各  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して複素数  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を対応させる写像が存在して, 次の (1)~(3) を満たすとき,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の内積という.

(1) (準双線形性)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, c \in \mathbb{C}$  に対して次が成り立つ<sup>(注3)</sup>.

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, c\mathbf{y}) = \bar{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

(2) (共役対称性)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$  が成り立つ.

(3) (正定値性)  $\mathbf{x} \in V$  に対して,  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$  が成り立つ. 等号成立は  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  のみ.

ベクトル空間  $V$  に内積が定義できるとき,  $V$  を内積空間と呼ぶ.

**定義 3.2.** (ノルム)  $V$  を内積空間とする. このとき,  $\mathbf{x} \in V$  に対して

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

をベクトル  $\mathbf{x}$  のノルムという.

**定理 3.3.** (シュワルツの不等式)  $V$  を内積空間とする. このとき, 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して,

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

が成り立つ.

**定理 3.4.** (ノルムの性質)  $V$  を内積空間とする. このとき, 以下の性質が成り立つ.

(1) 任意の  $\mathbf{x} \in V$  に対して,  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  である.

(2) 任意の  $\mathbf{x} \in V$  と  $c \in \mathbb{K}$  に対して,  $\|c\mathbf{x}\| = |c| \|\mathbf{x}\|$  が成り立つ.

(3) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して, 三角不等式  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  が成り立つ.

**定義 3.5.** (ベクトルのなす角)  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間  $V$  が内積空間であるとき, 零ベクトルでないベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

をみたす  $\theta$  を  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  のなす角という.

また, 内積空間  $V$  のベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に対して  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  が成り立つとき,  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  は直交するという.

(注3) 一番最後のものは双線形性とは異なるので注意.

定義 3.6. (グラム行列)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$  とおく. このとき,

$$G = {}^t AA$$

を  $A$  のグラム行列という. ここで,  ${}^t A$  は  $A$  の転置行列である.

グラム行列には次のような性質がある.

① グラム行列の成分は内積とノルムで書き表すことができる. すなわち, 次のようになる.

$${}^t AA = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}_1\|^2 & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) & \dots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & \|\mathbf{a}_2\|^2 & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) & \dots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2) & \|\mathbf{a}_3\|^2 & \dots & (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_3) & \dots & \|\mathbf{a}_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

② グラム行列は実対称行列である. すなわち,  ${}^t({}^t AA) = {}^t AA$  が成り立つ.

定義 3.7. (直交行列) 成分がすべて実数で  ${}^t PP = E$  をみたす正方行列  $P$  を直交行列とよぶ.

定理 3.8. (直交行列の意味)  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n)$  が直交行列であることの必要十分条件は次の 2 条件をみたすことである.

①  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  はすべてノルムが 1 である. すなわち,  $\|\mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_2\| = \dots = \|\mathbf{p}_n\| = 1$  である.

②  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  のどの 2 つのベクトルも直交する. すなわち,  $i \neq j$  をみたす  $i, j = 1, 2, \dots, n$  に対して,  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = 0$  である.

この定理の ①, ② はクロネッカーのデルタを用いると,  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) という条件にまとめることができる.

定義 3.9.  $V$  を  $n$  次元内積空間とする. このとき,  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n \in V$  が次の 3 条件をみたすとき,  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  は  $V$  の正規直交基底とよぶ:

①  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  はすべてノルムが 1 のベクトルである.

②  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  のどの 2 つのベクトルも直交する.

③  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  は  $V$  の基底である.

定理 3.10.  $V$  を内積空間とする. 零ベクトルではないベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V$  が互いに直交するとき,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は一次独立である.

定理 3.11. (直交行列と正規直交基底の関係) 次の 2 条件は同値である.

①  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n)$  は直交行列である.

②  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底である.

**定理 3.12.** (グラム・シュミットの直交化法)  $V$  を内積空間,  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$  を  $V$  の基底とする. このとき,  $\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n$  を以下の式で定義することにより, 正規直交基底  $\{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n\}$  が得られる.

$$(I) \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \text{ において, } \mathbf{b}'_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} \text{ とする.}$$

$$(II) j = 2, 3, \dots, n \text{ に対して, } \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{a}_j, \mathbf{b}'_i) \mathbf{b}'_i \text{ において, } \mathbf{b}'_j = \frac{\mathbf{b}_j}{\|\mathbf{b}_j\|} \text{ とする.}$$

念のため, よく使う  $\mathbb{R}^3$  の場合の公式を掲げておこう:

**定理 3.13.** (グラム・シュミットの直交化法:  $\mathbb{R}^3$  の場合)  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  を  $\mathbb{R}^3$  の基底とする. このとき,  $\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3$  を以下の式で定義することにより, 正規直交基底  $\{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3\}$  が得られる.

$$(I) \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \text{ において, } \mathbf{b}'_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} \text{ とする.}$$

$$(II) \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}'_1) \mathbf{b}'_1 \text{ において, } \mathbf{b}'_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} \text{ とする.}$$

$$(III) \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}'_1) \mathbf{b}'_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}'_2) \mathbf{b}'_2 \text{ において, } \mathbf{b}'_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|} \text{ とする.}$$

## 4 固有値と固有ベクトル

**定義 4.1.**  $n$  次正方行列  $A$  に対して,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

をみたす複素数  $\lambda$  とベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  が存在するとき,  $\lambda$  を  $A$  の固有値,  $\mathbf{x}$  を  $\lambda$  に対する固有ベクトルという.

【固有値・固有ベクトルの求め方】

- ① 固有方程式  $\det(\lambda E - A) = 0$  を解いて, 固有値  $\lambda$  を求める.
- ② ① で求めた固有値に対して, 連立一次方程式  $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解いて固有ベクトル  $\mathbf{x}$  を求める.  
(その際,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  であることに注意する.)

$A$  が  $n$  次正方行列であるとき,  $\det(\lambda E - A)$  は  $n$  次多項式である (行列式の定義からわかることである). そのため,  $\det(\lambda E - A)$  を固有多項式という.

**定義 4.2.** (固有値の重複度, 固有空間)

- ①  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  は相異なる値で,  $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$  であるとき, 各  $j = 1, 2, \dots, r$  に対して  $n_j$  を固有値  $\lambda_j$  の重複度という.
- ②  $A$  の固有値  $\lambda$  に対して,  $V_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$  を固有値  $\lambda$  に対する固有空間とよぶ<sup>(注4)</sup>.

固有空間  $V_\lambda$  は  $\lambda$  に対する固有ベクトルすべてと零ベクトルからなる集合である.

**定理 4.3.**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  を  $A$  の異なる固有値とし,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  に対する固有ベクトルであるとする. このとき,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  は一次独立である.

<sup>(注4)</sup>  $V_\lambda$  というのは世間一般的な記号ではない.  $W(\lambda, A)$ ,  $V(\lambda)$  など本によって様々な記号が用いられるので読む本が変わるときは注意すること.

## 5 正方行列の対角化

定義 5.1.  $n$  次正方行列  $A$  に対して,  $n$  次正則行列  $P$  をうまく見つけて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

の形を作れるとき,  $A$  は対角化可能であるという(注5).

定理 5.2. (対角化可能性の必要十分条件)  $n$  次正方行列  $A$  に対して, 次の 2 条件は同値である.

- ①  $A$  は対角化可能である. すなわち, 正則行列  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$  をうまく見つけて, (1) の形にできる.
- ②  $A$  は  $n$  個の一次独立な固有ベクトル  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  を持つ. ここで,  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  は  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  に対する固有ベクトルである.

証明. まず, 一般に  $n$  次正方行列  $A$  と  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$  に対して, 次の計算が成り立つ:

$$AP = A(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n) = (A\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2 \ \cdots \ A\mathbf{p}_n), \quad (2)$$

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix} = (\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{p}_n). \quad (3)$$

①  $\Rightarrow$  ② を示そう. (1) より,  $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix}$  であるから, (2), (3) の右辺同士が等しい. すなわち,  $(A\mathbf{p}_1 \ \cdots \ A\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{p}_n)$  が成り立つ. 列ごとに見れば,  $A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$  を得たことになる. 故に,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は  $A$  の固有値,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  は  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  に対する固有ベクトルである.  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  は一次独立である. 実際,  $P$  は正則行列であるから,  $\det P \neq 0$  だからである.

②  $\Rightarrow$  ① を示そう.  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  を  $A$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  に対する  $n$  個の一次独立な固有ベクトルであるとする. このとき,  $A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$  が成り立つので, (2), (3) の右辺同士が等しいことになる. よって,  $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix}$  が成り立つ. この式に  $P^{-1}$  をかける(注6) と (1) の形に表すことができる.  $\square$

この定理は実際に対角化をするときの方法を提案していることになる. 実際, 何らかの方法で  $A$  が対角化できることがわかったとき,  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とそれらに対する固有ベクトル  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  を一次独立になるように選んで, 行列  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$  を作れば, (1) の形に対角化ができるということである. 対角化可能か否かを判断するには次の 2 つの定理がある.

定理 5.3. (対角化可能条件 1)  $n$  次正方行列  $A$  が  $n$  個の相異なる固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を持つとき,  $A$  は対角化可能である.

証明. この定理の結果は, 定理 4.3 と定理 5.2 の結果を組み合わせたものになっている.  $\square$

(注5) この式の右辺のような行列は対角行列と呼んでいたことを思い出そう.

(注6)  $P^{-1}$  は存在する. 実際,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  は一次独立であるので,  $\det P \neq 0$  である.



これは、必要十分条件ではないことに注意をしよう。例えば、3次正方行列が2個しか固有値を持たない場合には使えない定理である。万能の定理としては次のものがある。

**定理 5.4.** (対角化可能条件 2)  $n$  次正方行列  $A$  に対して、 $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$  (但し、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  は相異なる値) とする。このとき、次の2条件は同値である。

- ①  $A$  は対角化可能である。
- ② すべての  $j = 1, 2, \dots, r$  に対して、 $\dim V_{\lambda_j} = n_j$  が成り立つ。

教科書でこの定理の証明は省略されているので、その部分を補うことにする。証明のために、次の補題を先に示す。

**補題 5.5.**  $\lambda_0$  を  $n$  次正方行列  $A$  の固有値、 $n_0$  を  $\lambda_0$  の重複度とする。このとき、 $\dim V_{\lambda_0} \leq n_0$  が成り立つ。

**証明.**  $\dim V_{\lambda_0} = d$  とおく。このとき、固有空間  $V_{\lambda_0}$  は  $\mathbf{C}^n$  の部分空間であるから、 $d \leq n$  であることに注意する。 $\mathbf{C}^n$  の基底  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  を  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$  (はじめの  $d$  個) が  $V_{\lambda_0}$  の基底になるように選ぶ。 $P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$  とおくと、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  が一次独立であることから  $P$  は正則行列になる。また、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$  は固有値  $\lambda_0$  に対する固有ベクトルであるから、固有値と固有ベクトルの関係により、

$$AP = (A\mathbf{v}_1 \ \dots \ A\mathbf{v}_d \ A\mathbf{v}_{d+1} \ \dots \ A\mathbf{v}_n) = (\lambda_0\mathbf{v}_1 \ \dots \ \lambda_0\mathbf{v}_d \ A\mathbf{v}_{d+1} \ \dots \ A\mathbf{v}_n)$$

である。 $A\mathbf{v}_{d+1}, \dots, A\mathbf{v}_n$  は  $\mathbf{C}^n$  の元であるので、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  の一次結合として表すことができる。つまり、各  $j = d+1, \dots, n$  に対して、

$$A\mathbf{v}_j = b_{1,j}\mathbf{v}_1 + b_{2,j}\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{n,j}\mathbf{v}_n$$

を満たす定数  $b_{1,j}, \dots, b_{n,j} \in \mathbf{C}$  が存在する。よって、

$$AP = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_0 & & b_{1,d+1} & \cdots & b_{1,n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \lambda_0 & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & b_{n,d+1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & & b_{1,d+1} & \cdots & b_{1,n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \lambda_0 & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & b_{n,d+1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

の形になる(何も書いていない部分はすべて0とする)。つまり、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 E_d & B \\ \mathbf{O} & C \end{pmatrix}$  の形になる。ここで、 $E_d$  は  $d$  次正方行列、 $B$  は  $d$  行  $(n-d)$  列の行列、 $C$  は  $(n-d)$  次正方行列となる。よって、 $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_0)^d \det(\lambda E_{n-d} - C)$  となり、このことは、固有値  $\lambda_0$  の重複度は  $d$  以上になっていることを意味する(注7)。よって、 $n_0 \geq d$  である。□

ちなみに、この補題を用いれば、重複度1の固有値に対しては必ず対角化可能条件2の②が満たされることが分かる。従って、対角化可能条件2の②が満たされるか否かは、重複度2以上の固有値に対して問うべき問題である。補題5.5を用いて定理5.4の証明をしよう。

**定理 5.4 の証明.** ①  $\Rightarrow$  ②であることを示す。定理5.2から、 $A$  は一次独立な  $n$  個の固有ベクトルを持つので、 $\sum_{j=1}^r \dim V_{\lambda_j} = n$  となる。また、 $A$  の固有多項式は  $n$  次式であるから、 $\sum_{j=1}^r n_j = n \cdots (*)$  である。したがって、 $\sum_{j=1}^r \dim V_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^r n_j$  である。補題5.5より、各  $j = 1, 2, \dots, r$  に対して  $\dim V_{\lambda_j} \leq n_j$  であることが示されているが、どれかひとつの  $j$  について  $\leq$  が  $<$  になれば、(\*) は成立しなくなる。よって、すべての  $j = 1, 2, \dots, r$  に対して  $\dim V_{\lambda_j} = n_j$  が成り立っていないといけない。

②  $\Rightarrow$  ①であることを示す。すべての  $j = 1, 2, \dots, r$  に対して  $\dim V_{\lambda_j} = n_j$  であるから、各  $j = 1, 2, \dots, r$  に対して、固有空間  $V_{\lambda_j}$  の基底をなすベクトル  $\mathbf{p}_{j,1}, \dots, \mathbf{p}_{j,n_j}$  が取れる ( $V_{\lambda_j} = \langle \mathbf{p}_{j,1}, \dots, \mathbf{p}_{j,n_j} \rangle$  である)。これらのベクトルは全部で  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$  個取れるわけだから、 $n$  個の固有ベクトルが得られた。定理4.3からそれらは1次独立となるので、定理5.2を用いれば  $A$  は対角化可能であることが分かる。□

(注7)  $\det(\lambda E_{n-d} - C)$  の部分から  $(\lambda - \lambda_0)$  の因数が出現してくる可能性もあることに注意。

定理 5.4 の ② の判定条件を満たさなければ対角化はできない. その際は, 三角化 (さらに進むとジョルダン標準形への変形<sup>(注 8)</sup>) の理論に進む.

定理 5.6. (三角化)  $n$  次正方行列の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とする (これらは重複度の数だけ重複して並べられているものとする). このとき, 正則行列  $P$  をうまく見つけて,  $P^{-1}AP$  を上三角行列にできる<sup>(注 9)</sup>:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

証明.  $n$  についての数学的帰納法で示す.  $n = 1$  のときは (非対角成分は存在せず) 対角行列であるので上三角行列であるとみなせる.

$n - 1$  次正方行列に対して上三角化が可能であると仮定し,  $n$  次正方行列に対しても上三角化が可能であることを確かめる. 固有値  $\lambda_1$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{p}_1$  をひとつとり,  $\tilde{P} = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$  が正則行列となるようにベクトル  $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  を取る. すると,

$$A\tilde{P} = (A\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2 \ \cdots \ A\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2 \ \cdots \ A\mathbf{p}_n)$$

が成り立つ.  $\tilde{P}$  は正則行列であるから,  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  は  $\mathbf{C}^n$  の基底である. よって,  $A\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n$  はどれも  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の一次結合として表すことができる. すなわち,  $j = 2, 3, \dots, n$  に対して,

$$A\mathbf{p}_j = b_{1j}\mathbf{p}_1 + b_{2j}\mathbf{p}_2 + \cdots + b_{nj}\mathbf{p}_n$$

をみたす定数  $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj} \in \mathbb{K}$  が存在する. よって,

$$A\tilde{P} = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって,  $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{o} & B \end{pmatrix}$  の形をしていることがわかる ( $B$  は  $n - 1$  次正方行列である). よって,

$$|\lambda E_n - A| = |\tilde{P}^{-1}|\lambda E_n - A|\tilde{P}| = |\lambda E_n - \tilde{P}^{-1}A\tilde{P}| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & * \\ \mathbf{o} & \lambda E_{n-1} - B \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)|\lambda E_{n-1} - B|$$

であるから,  $B$  の固有値は  $A$  の残りの固有値  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  と一致する.

$B$  は  $n - 1$  次正方行列であるから, 数学的帰納法の仮定により, ある正則行列  $Q$  が存在して,

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる.  $R = \begin{pmatrix} 1 & t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & Q \end{pmatrix}$ ,  $P = \tilde{P}R$  とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & Q^{-1} \end{pmatrix} \tilde{P}^{-1}A\tilde{P} \begin{pmatrix} 1 & t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{o} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{o} & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}$$

(注 8) ジョルダン標準形に関しては, 発展的な内容であるためここでは触れない.

(注 9) なお, 下三角行列にすることも可能である. (\* の部分は何か成分が入っている, という意味である.)

が成り立つ。これは,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを意味する。 □

**定理 5.7.** (直交行列による三角化)  $A$  を実係数の  $n$  次正方行列とし,  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とする (これらは重複度の数だけ重複して並べられているものとする).  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  がすべて実数ならば, 直交行列  $P$  をうまく見つけて,  ${}^tPAP$  を上三角行列にできる:

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

なお, 下三角行列にすることも可能である. (\*の部分には何が入っていても良いものとする.)

この定理は, 定理 5.6 の証明において,  $\tilde{P}$  を作るときに,  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  が正規直交基底になるように選ばば証明できる<sup>(注 10)</sup>.

## 6 実対称行列の直交行列による対角化

**定義 6.1.** (実対称行列)  ${}^tA = A$  をみたす成分が全て実数の行列  $A$  を実対称行列という.

**定理 6.2.** (実対称行列の性質)  $n$  次実対称行列  $A$  に対して, 次の性質が成り立つ.

- ①  $A$  の固有値はすべて実数である.
- ②  $A$  の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する.
- ③  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を  $A$  の固有値とする (これらは重複度の数だけ並べられているとする). このとき,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  の固有ベクトル  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  を  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  が正規直交基底になるように取れて, 直交行列  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n)$  を用いて,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

の形に対角化できる. 特に, 実対称行列はいつでも直交行列による対角化が可能である.

(注 10) グラム・シュミットの直交化を施せば, 基底から正規直交基底を作ることができる.