線形代数 II　期末テスト（2018 年 2 月 2 日）　1 枚目

学籍番号　　　　　　　　　　氏名　　　　　　　　　　点数　平均点: 54.21 点 (注 1)

$\boxed{1}$ 以下の文章を読んで問いに答えなさい.

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V において, 内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角の情報を与えるための重要な量である. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が零ベクトルでないとき, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角 θ は, 内積とノルム $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|$ を用いて, $\boxed{\quad (ア) \quad}$ を満たす θ として定義される. このような θ が定義されるためには, $\boxed{\quad (イ) \quad}$ が必要となる. それは次の不等式である:

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して, $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ が成り立つ.

これによって, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ が成り立ち, (イ) の関係式を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ がただひとつに定まるのである.

代表的なベクトル空間である $\mathbb{R}^n$ の標準内積とは, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boxed{\quad (ウ) \quad}$ と定義されるものであるが, 一般には $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V においては双線形性・対称性・正定値性の 3 条件を満たす実数値 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して成立するときに, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積と呼ぶ.

さて, ここで標準内積とは異なる $\mathbb{R}^n$ を紹介しよう. A を n 次正則行列とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A =^t \mathbf{x}^t AA\mathbf{y}$ と定義する. ここで, ${}^t\mathbf{x}$, ${}^tA$ はベクトル $\mathbf{x}$, 行列 A の転置を表す. これが $\mathbb{R}^n$ の内積であることを示すためには, 双線形性, 正定値性, 対称性の 3 条件を満たすことを示さねばならない.

(1) 上の文章の (ア), (イ), (ウ) に当てはまる用語・数式を答えよ.

(2) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して, ${}^t\mathbf{p}\mathbf{q} =^t \mathbf{q}\mathbf{p}$ が成り立つことを確かめよ.

(3) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A$ の対称性, すなわち, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A = (\mathbf{y}, \mathbf{x})_A$ が成り立つことを示しなさい.

(4) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A$ の正定値性, すなわち, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_A \geq 0$ が成り立ち, 等号は $\mathbf{x}$ が零ベクトルのときのみ成立することを示しなさい (ヒント: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ とおいてみると良いであろう.).

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) (ア) $\cos\theta = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}, 0 \leq \theta \leq \pi$ （イ）シュワルツの不等式　（ウ）${}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$

(2) $${}^t\mathbf{p}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n$$ および $${}^t\mathbf{q}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = q_1p_1 + q_2p_2 + \cdots + q_np_n$$ から ${}^t\mathbf{p}\mathbf{q} =^t \mathbf{q}\mathbf{p}$ が得られる.

(3) (2) の結果を用いて, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A =^t \mathbf{x}^t AA\mathbf{y} =^t (A\mathbf{x})A\mathbf{y} =^t (A\mathbf{y})A\mathbf{x} =^t \mathbf{y}^t AA\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{x})_A$. よって, 対称性が示された(注 2).

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{y} = A\mathbf{x}$ とおくと, $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_A =^t \mathbf{x}^t AA\mathbf{x} =^t (A\mathbf{x})A\mathbf{x} =^t \mathbf{y}\mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2 \geq 0$ となる. 等号成立条件は, $(y_1, \cdots, y_n) = (0, \cdots, 0)$, すなわち, $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ である. これは $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ と同値である. A が正則行列であるから A^{-1} が存在するので, $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ とも同値である. 故に, 正定値性が示された. □

(注 1)学科別情報

$\boxed{\text{学科別平均点}}$

社環：51.81 点　建築：52.47 点　生命情報：62 点　システム：55.23 点　生物：48 点

$\boxed{\text{学科別上位 3 位}}$

社環：93 点, 77 点, 77 点　建築：87 点, 85 点, 79 点　生命情報：83 点，82 点，75 点

システム生体：88 点，86 点，82 点　生物：71 点，66 点，62 点

(注 2)「A は正則行列なので ${}^tAA = E$」という回答が何件かありましたがこれは間違いです. 直交行列と正則行列を勘違いしていますね.

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 9 & -7 & 14 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A は固有値を求めよ. また, 各固有値の重複度を求めよ.

(2) A は対角化可能であるか否か調べ, 可能である場合には対角化する行列 P を求めて対角化せよ.

(3) 自然数 n に対して $A^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=9a_n-7b_n+14c_n, b_{n+1}=-4a_n+6b_n-8c_n, c_{n+1}=-6a_n+6b_n-10c_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$, $a_1=-1, b_1=c_1=1$ を満たす数列とする. このとき, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ.

解答例 (1) A の固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-9 & 7 & -14 \\ 4 & \lambda-6 & 8 \\ 6 & -6 & \lambda+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 7 & -14 \\ \lambda-2 & \lambda-6 & 8 \\ 0 & -6 & \lambda+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 7 & -14 \\ 0 & \lambda-13 & 22 \\ 0 & -6 & \lambda+10 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\{(\lambda-13)(\lambda+10)+132\} = (\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda-2) = (\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

となるので, A の固有値は $\lambda=1$(重複度 1), 2(重複度 2) である.

(2) (i) $\lambda=2$ について考える. $2E-A=\begin{pmatrix} -7 & 7 & -14 \\ 4 & -4 & 8 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるので, $(E-A)\mathbf{x}=\mathbf{o}$ の一般解は $3-\operatorname{rank}(E-A)=3-1=2$ 個の任意の定数 c_1, c_2 を用いて表される. $x_2=c_1, x_3=c_2$ とおくと $x_1=c_1-2c_2$ を得る. よって, 一般解は $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

(ii) $\lambda=1$ について考える.

$$E-A=\begin{pmatrix} -8 & 7 & -14 \\ 4 & -5 & 8 \\ 6 & -6 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $(2E-A)\mathbf{x}=\mathbf{o}$ の一般解は, $3-\operatorname{rank}(2E-A)=3-2=1$ 個の任意の定数 c_3 を用いて表される. $x_3=6c_3$ とおけば, $x_1=-7c_3, x_2=4c_3$ となる. よって, 一般解は $\mathbf{x}=c_3\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ である.

(i), (ii) より, 固有値の重複度と固有空間の次元が一致することがわかるので A は対角化可能である. 実際, $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化される.

(3) $P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $A^n=P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$. 掃出し法により, $P^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -11 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ となるので,

$$A^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \\ 0 \end{pmatrix}=2^nP\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 与えられた漸化式は, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ と表される. (3) の結果から, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. □

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値は 1 と 2 であることを確かめ, 固有値の重複度を求めよ.

(2) A は対角化可能か否か調べ, 対角化可能である場合には対角化する行列 P を求めて対角化せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $0 = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ となるので, A の固有値は $\lambda = 1$(重複度 2), 2(重複度 1) である.

(2) 固有値 1 について考える. $E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるので, $(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の一般解は $3 - \mathrm{rank}\,(E-A) = 3 - 2 = 1$ 個の任意の定数 c を用いて表される. $x_1 = 0$ は確定するので, $x_3 = c$ とおくと $x_2 = c$ を得る. よって, 一般解は $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. よって, 固有値 1 に対して固有空間の次元は 1 となって, 固有値の重複度は 2 と一致しないので, A は対角化不可能である.

□

$\boxed{4}$ 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ に対して, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. また, そのときの ${}^tPAP$ を求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ 固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda+3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda+3 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)\{(\lambda+3)(\lambda+5)-8\} = (\lambda+1)(\lambda^2+8\lambda+7) = (\lambda+1)^2(\lambda+7) \end{aligned}$$

となるので, A の固有値は $\lambda = -1$(重複度 2), -7(重複度 1) である.

① $\lambda = -1$ について考える.

$-E - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるので, $(-E - A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の一般解は, $3 - \mathrm{rank}\,(-E - A) = 3 - 1 = 2$ 個の任意の定数 c_1, c_2 を用いて表される. $x_2 = c_1, x_3 = c_2$ とおくと, $x_1 = c_1 - c_2$ となるので, 一般解は $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおいて正規直交化を施すとすると, $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る.

② $\lambda = -7$ について考える.

$$-7E - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $(-7E - A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の一般解は $3 - \mathrm{rank}\,(-7E - A) = 3 - 2 = 1$ 個の任意の定数 c_3 を用いて表される. $x_3 = c_3$ とおけば, $x_1 = c_3, x_2 = -c_3$ となるので, $\mathbf{x} = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. よって, 固有ベクトルとして $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる. これを正規化してベクトル $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる.

①,② より, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とおけば, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ を得る. □