線形代数 II 期末試験 (2018 年 2 月 2 日)

担当：新國裕昭

約束

- 学生証 を持参してください. 当日チェックをします.
- 答えのみの解答は不可とします. 計算の過程を必ず書いて，問題集の解答を作るつもりで答案を作成しましょう.
- 携帯電話やスマートフォン，タブレットなどの通信機器は電源を切ってカバンにしまって下さい.（時計代わりに使用したり，外部との通信をしたりすることは禁止します.）
- 机の上には筆記用具，学生証，時計以外のものは置かないで下さい. 電卓の持ち込みは禁止です.
- 開始の合図があるまで，学籍番号・氏名以外のものを書き込んではいけません.
- 問題に不備があると感じた場合は，それを指摘することを問題とし，正しく指摘ができていることによって正解, 正しく指摘していなければ不正解とする.
- 解答は採点終了後，ホームページに掲載するので復習すること.
- 試験当日は次の座席表の通りに着席して受験すること.

◆◆◆期末試験内容◆◆◆

期末試験は, 以下のような問題を出題します.

$\boxed{1}$ では, 内積に関する設問を出題します. 内積と言えば，双線形性・対称性・正定値性の３条件を満たすものとして定義されます. ここでは, 標準内積以外のものについてそのうちのいずれかを示す問題を出題します.

A を n 次正則行列とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A = {}^t\mathbf{x}\,{}^tAA\mathbf{y}$ と定義する (ここで, ${}^t\mathbf{x}$, ${}^tA$ はベクトル $\mathbf{x}$, 行列 A の転置を表す) と, 内積になることを確かめておきましょう.

$\boxed{2}$ では，行列の対角化の問題を出題します.

基本問題集 $\boxed{25}$, $\boxed{26}$ で練習し, 線形数学 II(総合デザイン工学科用) の 2014 年度期末試験の $\boxed{3}$, 線形数学 II(総合デザイン工学科用) の 2015 年度期末試験の$\boxed{3}$, 線形代数 II の 2016 年期末試験の $\boxed{1}$のような A^n を求める問題をいくつか探して解いておくこと. 逆行列の計算方法（掃き出し法など）も思い出しておきましょう. 2017 年期末試験の漸化式との関連問題も知っておきましょう.

$\boxed{3}$ でも, 行列の対角化に関連する問題を出題します. 線形代数 II の 2015 年度の期末試験 $\boxed{1}$, 線形数学 II(総合デザイン工学科用) の 2015 年度の期末試験 $\boxed{2}$ などを解いておきましょう. 特に, どんなときに対角化ができて, どんなときにできないかを確認しておきましょう.

$\boxed{4}$ では, 実対称行列の直交行列による対角化の問題を出題します. 基本問題集の $\boxed{28}$ を解いて練習しておきましょう. 線形代数 II の 2015 年度の期末試験 $\boxed{2}$ など過去にも類題を出題しています.

線形代数 II　期末テスト（2018 年 2 月 2 日）　1 枚目

学籍番号 ________________　氏名 ________________　点数 ________________

$\boxed{1}$ 以下の文章を読んで問いに答えなさい.

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V において, 内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角の情報を与えるための重要な量である. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が零ベクトルでないとき, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角 θ は, 内積とノルム $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|$ を用いて, $\boxed{\quad (ア) \quad}$ を満たす θ として定義される. このような θ が定義されるためには, $\boxed{\quad (イ) \quad}$ が必要となる. それは次の不等式である:

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して, $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ が成り立つ.

これによって, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ が成り立ち, (イ) の関係式を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ がただひとつに定まるのである.

代表的なベクトル空間である $\mathbb{R}^n$ の標準内積とは, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boxed{\quad (ウ) \quad}$ と定義されるものであるが, 一般には $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V においては双線形性・対称性・正定値性の 3 条件を満たす実数値 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して成立するときに, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積と呼ぶ.

さて, ここで標準内積とは異なる $\mathbb{R}^n$ を紹介しよう. A を n 次正則行列とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A =^t \mathbf{x}^t AA\mathbf{y}$ と定義する. ここで, ${}^t\mathbf{x}$, ${}^tA$ はベクトル $\mathbf{x}$, 行列 A の転置を表す. これが $\mathbb{R}^n$ の内積であることを示すためには, 双線形性, 正定値性, 対称性の 3 条件を満たすことを示さねばならない.

(1) 上の文章の (ア), (イ), (ウ) に当てはまる用語・数式を答えよ.

(2) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して, ${}^t\mathbf{p}\mathbf{q} =^t \mathbf{q}\mathbf{p}$ が成り立つことを確かめよ.

(3) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A$ の対称性, すなわち, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A = (\mathbf{y}, \mathbf{x})_A$ が成り立つことを示しなさい.

(4) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A$ の正定値性, すなわち, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_A \geq 0$ が成り立ち, 等号は $\mathbf{x}$ が零ベクトルのときのみ成立することを示しなさい (ヒント: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ とおいてみると良いであろう.).

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 14 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A は固有値を求めよ. また, 各固有値の重複度を求めよ.

(2) A は対角化可能であるか否か調べ, 可能である場合には対角化する行列 P を求めて対角化せよ.

(3) 自然数 n に対して $A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を漸化式 $a_{n+1} = 9a_n - 7b_n + 14c_n, b_{n+1} = -4a_n + 6b_n - 8c_n, c_{n+1} = -6a_n + 6b_n - 10c_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $a_1 = -1, b_1 = c_1 = 1$ を満たす数列とする. このとき, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ.

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値は 1 と 2 であることを確かめ, 固有値の重複度を求めよ.

(2) A は対角化可能か否か調べ, 対角化可能である場合には対角化する行列 P を求めて対角化せよ.

$\boxed{4}$　実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ に対して, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. また, そのときの ${}^tPAP$ を求めよ.