微分積分学1計算問題1000本ノック(を目指して作成中)

※ 積分の高校レベルと $+\epsilon$ くらいの問題を集めました. 大学で学ぶ新しい積分前の練習にお使いください.
※ まだ全然1000問になるまで道は遠いです. 問題を募集中です.
※ この資料はまだ試作品です. 誤りが含まれているかもしれません. 発見したら教えて頂けると幸いです.
記号の意味 ★印が付いているものは, 逆三角関数 ($\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ [注1]), 双曲線関数 $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ の微分積分を行うので大学レベルの問題です. $\csc x, \sec x, \cot x$ が途中で出てきた場合, それらは, $\frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\tan x}$ のことです.

1 次の不定積分を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$ (2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx$ (3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx$ (4) $I_4 = \displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int 4^x dx$ (6) $I_6 = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ (7) $I_7 = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$ (8) $I_8 = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^4}dx$

(9) $I_9 = \displaystyle\int x\sin x^2 dx$ (10) $I_{10} = \displaystyle\int xe^{x^2}dx$

2 部分積分や置換積分をすることにより, 次の不定積分を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int x\sin x dx$ (2) $I_2 = \displaystyle\int \log x dx$ (3) $I_3 = \displaystyle\int \log x^2 dx$ (4) $I_4 = \displaystyle\int xe^x dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int x^2\sin x dx$ (6) $I_6 = \displaystyle\int x^3\sin x dx$ (7) $I_7 = \displaystyle\int x^2e^x dx$ (8) $I_8 = \displaystyle\int x^3e^x dx$

(9)★ $I_9 = \displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ (10) $I_{10} = \displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$ (11) $I_{11} = \displaystyle\int \frac{x^5}{(1+x^3)^2}dx$ (12) $I_{12} = \displaystyle\int x\sin x\cos x dx$

(13) $I_{13} = \displaystyle\int (\log x)^2 dx$ (14)★ $I_{14} = \displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ (15) $I_{15} = \displaystyle\int x^3\sin x^2 dx$ (16) $I_{16} = \displaystyle\int x^3e^{x^2}dx$

(17) $I_{17} = \displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ (18) $I_{18} = \displaystyle\int e^{\sin x}\sin x\cos x dx$ (19) $I_{19} = \displaystyle\int e^x\sin x dx$ (20) $I_{20} = \displaystyle\int e^x\sin^2 x dx$

(21) $I_{21} = \displaystyle\int e^x\sin^3 x dx$ (22) $I_{22} = \displaystyle\int \sqrt{x}\log x dx$ (23) $I_{23} = \displaystyle\int (x+1)\sin x dx$ (24) $I_{24} = \displaystyle\int x\sin 2x dx$

(25) $I_{25} = \displaystyle\int x\sqrt{1+x}dx$ (26) $I_{26} = \displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ (27) $I_{27} = \displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+2}}dx$ (28) $I_{28} = \displaystyle\int \sin(\log x)dx$

(29) $I_{29} = \displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

3 以下の三角関数関連の不定積分を練習せよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \sin x dx$ (2) $I_2 = \displaystyle\int \sin^2 x dx$ (3) $I_3 = \displaystyle\int \sin^3 x dx$ (4) $I_4 = \displaystyle\int \sin^4 x dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int \cos x dx$ (6) $I_6 = \displaystyle\int \cos^2 x dx$ (7) $I_7 = \displaystyle\int \cos^3 x dx$ (8) $I_8 = \displaystyle\int \cos^4 x dx$

(9) $I_9 = \displaystyle\int \tan x dx$ (10) $I_{10} = \displaystyle\int \tan^2 x dx$ (11) $I_{11} = \displaystyle\int \tan^3 x dx$ (12) $I_{12} = \displaystyle\int \tan^4 x dx$

(13) $I_{13} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ (14) $I_{14} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ (15) $I_{15} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ (16) $I_{16} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

(17) $I_{17} = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ (18) $I_{18} = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ (19) $I_{19} = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ (20) $I_{20} = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

(21) $I_{21} = \displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$ (22) $I_{22} = \displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2 x}$ (23) $I_{23} = \displaystyle\int \frac{dx}{\tan^3 x}$ (24) $I_{24} = \displaystyle\int \frac{dx}{\tan^4 x}$

(25) $I_{25} = \displaystyle\int \sin x\cos x dx$ (26) $I_{26} = \displaystyle\int \sin x\cos^2 x dx$ (27) $I_{27} = \displaystyle\int \sin x\cos^3 x dx$

(28)★ $I_{28} = \displaystyle\int \sin^{-1} x dx$ (29)★ $I_{29} = \displaystyle\int \cos^{-1} x dx$ (30)★ $I_{30} = \displaystyle\int \tan^{-1} x dx$

[注1] これらは, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ とも書くので注意.

(31) $I_{31} = \displaystyle\int \sin x \sin 3x dx$ (32) $I_{32} = \displaystyle\int \cos x \sin 3x dx$

(33) ⋆ $I_{33} = \displaystyle\int (\arcsin x)^2 dx$ (34) ⋆ $I_{34} = \displaystyle\int (\arccos x)^2 dx$ (35) ⋆ $I_{35} = \displaystyle\int x(\arctan x)^2 dx$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$ を用いる次の不定積分の練習をせよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \cot x dx$ (2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-1} dx$ (3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ (4) ⋆ $I_4 = \displaystyle\int \tanh x dx$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log|x + \sqrt{x^2+A}|$ (但し, $A \neq 0$ は定数) を用いて, 次の不定積分を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ (2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$

$\boxed{6}$ その他の不定積分として以下のものを求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$\boxed{7}$ 次の定積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ (2) $I_2 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$ (3) $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ (4) $I_4 = \displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4}$

$\boxed{8}$ 次の定積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) |\sin 2x| dx$

解答

以下, C は積分定数とする[注 2].

$\boxed{1}$ (1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} = \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

(2) $I_2 = \displaystyle\int dx - 5\int \frac{dx}{x^2} + 6\int \frac{dx}{x^4} = x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + C.$

(3) $I_3 = 2\displaystyle\int \sqrt{x}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{4}{3}x^{3/2} + 6\sqrt{x} + C.$

(4) $I_4 = \displaystyle\int \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^{3/2}} + \int \frac{dx}{x^2} = \log|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C.$

(5) $I_5 = \dfrac{4^x}{\log 4} + C.$

(6) $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ に注意すれば, $I_6 = -\dfrac{1}{2+2x^2} + C$ を得る.

(7) $\left\{\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\right\}' = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^3}$ に注意すれば, $I_7 = -\dfrac{1}{4(1+x^2)^2} + C$ を得る.

(8) $\left\{\dfrac{1}{(1+x^2)^3}\right\}' = -\dfrac{6x}{(1+x^2)^4}$ に注意すれば,$I_8 = -\dfrac{1}{6(1+x^2)^3} + C$ を得る.

(9) $(\cos x^2)' = -2x\sin x^2$ より, $I_9 = -\dfrac{\cos x^2}{2} + C.$

(10) $I_{10} = \dfrac{e^{x^2}}{2} + C$ である[注 3].

$\boxed{2}$ (1) $I_1 = \displaystyle\int x(-\cos x)'dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$[注 4] .

(2) $I_2 = \displaystyle\int (x)'\log x dx = x\log x - \int x(\log x)'dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C.$

(3) $I_3 = 2\displaystyle\int \log x dx$ であるから, (2) の結果を用いれば, $I_3 = 2x\log x - 2x + C$ となる.

(4) $I_4 = \displaystyle\int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

(5) 部分積分を 2 回行って計算する:

$$\begin{aligned} I_5 &= \int x^2(-\cos x)'dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C. \end{aligned}$$

(6) 部分積分を 3 回行って計算する:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int x^3(-\cos x)'dx = -x^3\cos x + 3\int x^2(\sin x)'dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x dx \\ &= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6\int x(\cos x)'dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\int \cos x dx \\ &= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C. \end{aligned}$$

(7) 部分積分を 2 回行って計算する:

$$I_7 = \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - 2\int x(e^x)'dx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

[注 2]「C は積分定数とする」というのは設問ごとに書かないことにする.

[注 3] $x^2 = t$ とおけばよいが, $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ くらいは暗算でできるようにしてください. (6)〜(9) も置換積分をしても良いですが, 置換積分をせずに何を微分すれば被積分関数（積分の中身）に近いものが得られるかの予想ができるようになりましょう.

[注 4] $\boxed{\text{テストでたまに見かける間違い}}$ $I_1 = \displaystyle\int x(-\cos x)'dx$ と書くべきところを $I_1 = \displaystyle\int x - \cos x'dx$ としていませんか？ 書いている本人は $(-\cos x)'$ のつもりでも, 後者のように書くと全然そのように見えません. x と $(-\cos x)'$ の掛け算の部分がまるで x から $\cos x'$ を引き算しているように見えてしまっているのに気づいたら, 今後はきちんとカッコをつけて書くように注意するようにしましょう.

(8) 部分積分を 3 回行って計算する:

$$\begin{aligned} I_8 &= \int x^3(e^x)'dx = x^3e^x - 3\int x^2e^xdx = x^3e^x - 3\int x^2(e^x)'dx = x^3e^x - 3(x^2e^x - \int 2xe^xdx) \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^xdx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6(xe^x - \int e^xdx) \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C. \end{aligned}$$

(9) $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ に注意すれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned} I_9 &= \int x\left\{\frac{-1}{2(1+x^2)}\right\}'dx = x\left\{\frac{-1}{2(1+x^2)}\right\} - \int\left\{\frac{-1}{2(1+x^2)}\right\}dx = -\frac{x}{2+2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{x}{2+2x^2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C \end{aligned}$$

(10) $\left(\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\right)' = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^3}$ および $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ に注意して計算する.

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int x^2\left\{-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\right\}'dx = -\frac{x^2}{4(1+x^2)^2} - \int 2x\left\{-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\right\}dx = -\frac{x^2}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= -\frac{x^2}{4(1+x^2)^2} - \frac{1}{4(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

(11) $\left(\dfrac{1}{1+x^3}\right)' = -\dfrac{3x^2}{(1+x^3)^2}$ に注意して計算する.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int x^3\left\{-\frac{1}{3(1+x^3)}\right\}'dx = -\frac{x^3}{3(1+x^3)} - \int 3x^2\left\{-\frac{1}{3(1+x^3)}\right\}dx \\ &= -\frac{x^3}{3(1+x^3)} + \int\frac{x^2}{1+x^3}dx = -\frac{x^3}{3(1+x^3)} + \frac{1}{3}\log|1+x^3| + C. \end{aligned}$$

(12) 二通りのやり方で計算してみよう. まずは,

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int x\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)'dx = x\cdot\frac{\sin^2 x}{2} - \int\frac{\sin^2 x}{2}dx = \frac{x\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx \\ &= \frac{x\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C = \frac{x\sin^2 x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C \end{aligned}$$

とする方法がひとつ. あるいは,

$$I_{12} = \int x\frac{\sin 2x}{2}dx = \int x\left(-\frac{\cos 2x}{4}\right)'dx = -\frac{x\cos 2x}{4} + \int\frac{\cos 2x}{4}dx = -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.$$

($\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x$ であるからどちらの答えも同じである.)

(13) 部分積分を 2 回使って計算する:

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int x'(\log x)^2dx = x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx = x(\log x)^2 - 2\int\log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\int x'\log x dx = x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C. \end{aligned}$$

(14) 途中で出てくる $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ が難しいかもしれないが次のようにやる:

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int x'\log(1+x^2)dx = x\log(1+x^2) - \int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx = x\log(1+x^2) - 2\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx \\ &= x\log(1+x^2) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\log(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x + C. \end{aligned}$$

(15) 途中で $(\cos x^2)' = -2x\sin x^2$ や $(\sin x^2)' = 2x\cos x^2$ に気付くのが大切である:

$$I_{15} = \int x^2\left(-\frac{\cos x^2}{2}\right)' dx = -\frac{x^2\cos x^2}{2} - \int 2x\left(-\frac{\cos x^2}{2}\right)dx = -\frac{x^2\cos x^2}{2} + \int x\cos x^2 dx = -\frac{x^2\cos x^2}{2} + \frac{\sin x^2}{2} + C.$$

(16) 途中で $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ に気付くのが大切である:

$$I_{16} = \int x^2\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)' dx = \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \int 2x \times \frac{e^{x^2}}{2}dx = \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \int xe^{x^2}dx = \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

(17) 途中で $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ や $(\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ に気付くのが大切である:

$$\begin{aligned} I_{17} &= \int(-x^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' dx = -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \int(-2x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2\sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

(18) $(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cos x$ に気付くのが大切である:

$$I = \int(e^{\sin x})'\sin x dx = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

(19) 部分積分を 2 回すると元の不定積分が出現するタイプである:

$$\begin{aligned} I_{19} &= \int(e^x)'\sin x dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x dx = e^x\sin x - \int(e^x)'\cos x dx \\ &= e^x\sin x - (e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)dx) = e^x\sin x - e^x\cos x - I_{19} \end{aligned}$$

であるから, $I_{19} = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

(20) 部分積分を 2 回すると元の不定積分が出現するタイプである:

$$\begin{aligned} I_{20} &= \int(e^x)'\sin^2 x dx = e^x\sin^2 x - \int e^x \cdot 2\sin x\cos x dx = e^x\sin^2 x - 2\int(e^x)'\sin x\cos x dx \\ &= e^x\sin^2 x - 2\left\{e^x\sin x\cos x - \int e^x(\cos^2 x - \sin^2 x)dx\right\} = e^x\sin^2 x - 2e^x\sin x\cos x + 2\int e^x(1 - 2\sin^2 x)dx \\ &= e^x\sin^2 x - 2e^x\sin x\cos x + 2e^x - 4I_{20} \end{aligned}$$

であるから, $I_{20} = \frac{1}{5}(e^x\sin^2 x - 2e^x\sin x\cos x + 2e^x) + C.$

(21) 部分積分を 2 回すると元の不定積分が出現するタイプである:

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int(e^x)'\sin^3 x dx = e^x\sin^3 x - \int e^x \cdot 3\sin^2 x\cos x dx \\ &= e^x\sin^3 x - 3\int(e^x)'\sin^2 x\cos x dx = e^x\sin^3 x - 3\left\{e^x\sin^2 x\cos x - \int e^x(2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x)dx\right\} \\ &= e^x\sin^3 x - 3e^x\sin^2 x\cos x + 3\left(2\int e^x\sin x\cos^2 x dx - \int e^x\sin^3 x dx\right) \\ &= e^x\sin^3 x - 3e^x\sin^2 x\cos x + 6\int e^x\sin x(1 - \sin^2 x)dx - 3I_{21} = e^x\sin^3 x - 3e^x\sin^2 x\cos x + 6I_{19} - 6I_{21} - 3I_{21} \end{aligned}$$

であるから, $I_{21} = \frac{1}{10}\left(e^x\sin^3 x - 3e^x\sin^2 x\cos x + 3e^x\sin x - 3e^x\cos x\right) + C.$

(22) 部分積分により,

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' \log x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \log x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

(23) 部分積分により,

$$I_{23} = \int (x+1)(-\cos x)' dx = -(x+1)\cos x + \int \cos x dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C.$$

(24) 部分積分により,

$$I_{24} = \int x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

(25) $t = \sqrt{1+x}$ とおくと, $t^2 = 1+x$, すなわち, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ を得る. よって,

$$I_{25} = \int (t^2-1)t \cdot 2dt = 2\int (t^4 - t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C.$$

(26) $\log x = t$ とおくと, $\frac{dx}{x} = dt$ となるので, $I_{26} = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$

(27) $\sqrt{x+2} = t$ とおくと, $x + 2 = t^2$, $dx = 2tdt$ となるので, $I_{27} = \int \frac{2(t^2-2)+1}{t} \times 2tdt = 2\int (2t^2-3)dt = 2\left(\frac{2}{3}t^3 - 3t\right) + C = \frac{4}{3}t^3 - 6t + C = \frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - 6\sqrt{x+2} + C.$

(28) $\log x = t$ とおくと, $\frac{dx}{x} = dt$. $x = e^t$ であるから, $dx = e^t dt$ となる. よって,

$$I_{28} = \int e^t \sin t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \left(e^t \cos t - \int e^t(-\sin t)dt\right) = e^t \sin t - e^t \cos t - I_{28}.$$

従って,

$$I_{28} = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} + C.$$

(29) $\sqrt{x} = t$ とおくと, $x = t^2$ であるから, $dx = 2tdt$. よって,

$$I_{29} = \int e^t \cdot 2tdt = 2\int te^t dt = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$\boxed{3}$ (1) $I_1 = -\cos x + C.$

(2) 倍角の公式より, $I_2 = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

(3) $I_3 = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$(注 5).

(4) 倍角の公式より, $I_4 = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$. ここからさらに倍角の公式を用いれば, $I_4 = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$ となる.

(5) $I_5 = \sin x + C.$

(6) $I_6 = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

(7) $I_7 = \int \cos x(1-\sin^2 x)dx$ と変形する. $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$ であるので, $I_7 = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

(注 5)なお, 三倍角の公式を用いて, $I_3 = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} dx$ と変形して計算する方法もある.

(8) 倍角の公式より, $I_8=\displaystyle\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$
$=\displaystyle\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

(9) $I_9=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+C.$

(10) $I_{10}=\displaystyle\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C.$

(11) $I_{11}=\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x dx$ と変形しよう. あとは $\cos x=t$ とおけば計算できる. 実際, $dt=-\sin x dx$ より,

$$I_{11}=\int\frac{1-t^2}{t^3}(-dt)=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\log|t|+\frac{1}{2t^2}+C=\log|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$$

(12) $I_{12}=\displaystyle\int\{(\tan^2 x+1)(\tan^2 x-1)+1\}dx=\int(\tan^2 x-1)\frac{1}{\cos^2 x}dx+x$ まで計算し, あとは $\tan x=t$ とおけば計算できる. 実際, $\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$ であるから,

$$I_{12}=\int(t^2-1)dt+x=\frac{t^3}{3}-t+x+C=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C.$$

(13) $I_{13}=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$
$=\displaystyle\frac{1}{2}\int\left\{\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\right\}dx=\frac{1}{2}(\log|1-\cos x|-\log|1+\cos x|)+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C.$

(14) $\displaystyle\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$ であるから, $I_{14}=-\cot x+C.$

【別解】$I_{14}=\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^2 x\cos^2 x}$ と変形する. $t=\tan x$ とおくと, $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$ となるので, $I_{14}=\displaystyle\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\tan x}+C.$

(15) $I_{15}=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}dx$ と変形する. $\cos x=t$ とおくと, $-\sin x dx=dt$ となることから, $I_{15}=\displaystyle-\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=-\int\frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2}$ と表される. あとは部分分数分解を用いて計算すればよい. $\displaystyle\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{C_1}{1-t}+\frac{C_2}{(1-t)^2}+\frac{C_3}{1+t}+\frac{C_4}{(1+t)^2}$ とおいて分母を払い, 係数を比較すれば, $C_1=C_2=C_3=C_4=\frac{1}{4}$ となることがわかる(注 6). よって,

$$\begin{aligned}
I_{15} &= -\frac{1}{4}\int\left\{\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right\}dt\\
&= -\frac{1}{4}\left(-\log|1-t|+\frac{1}{1-t}+\log|1+t|-\frac{1}{1+t}\right)+C\\
&= -\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)+C\\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|-\frac{t}{2(1-t^2)}+C\\
&= \frac{1}{4}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C
\end{aligned}$$

となる(注 7).

(注 6) この部分の計算は各自で補強せよ.
(注 7) 最後は安易に絶対値を外したわけではない. 外して良い理由を述べよ.

(16) 部分積分をすると求めるものの関係式が得られるタイプである:

$$\begin{aligned}I_{16} &= \int \frac{1}{\sin^2 x}(-\cot x)' dx = -\frac{\cot x}{\sin^2 x} - \int (-2)\frac{\cos x}{\sin^3 x}(-\cot x)dx = -\frac{\cos x}{\sin^3 x} - 2\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^3 x} - 2\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}dx = -\frac{\cos x}{\sin^3 x} - 2I_{16} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^3 x} - 2I_{16} - 2\cot x\end{aligned}$$

であるから, $I_{16} = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} - 2\cot x + C$.

(17) $I_{17} = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x} + \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right)dx$ $= \dfrac{1}{2}(-\log|1-\sin x| + \log|1+\sin x|) + C = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$

(18) $I_{18} = \tan x + C.$

(19) $I_{19} = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2(1+\sin x)^2}dx$ であるから, $\sin x = t$ とおくと,

$$I_{19} = \int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2}$$

となる. I_{15} に現れる部分分数分解の結果を用いれば,

$$\begin{aligned}I_{19} &= \frac{1}{4}\int\left\{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}\right\}dt \\ &= \frac{1}{4}\left(-\log|1-t| + \frac{1}{1-t} + \log|1+t| - \frac{1}{1+t}\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C.\end{aligned}$$

(20) 部分積分をすると求めるものの関係式が得られるタイプである:

$$\begin{aligned}I_{20} &= \int \frac{1}{\cos^2 x}(\tan x)' dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int (-2)\frac{-\sin x}{\cos^3 x}\tan x dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2I_{20} + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2I_{20} + 2\tan x.\end{aligned}$$

よって, $I_{20} = \dfrac{\tan x}{3\cos^2 x} + \dfrac{2\tan x}{3} + C$ である(注 8).

(21) $I_{21} = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \log|\sin x| + C.$

(22) $I_{22} = \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - x = -\cot x - x + C.$

(23) $I_{23} = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\cos x dx$ と変形する. $t = \sin x$ とおくと, $dt = \cos x dx$ となるので, $I_{23} = \displaystyle\int \frac{1-t^2}{t^3}dt = \int\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right)dt = -\frac{1}{2t^2} - \log|t| + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \log|\sin x| + C.$

(24) $I_{24} = \displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^4 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^4 x} - 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int dx$ と変形して, (14), (16) の結果を代入して計算すれば, $I_{24} = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} + x + C$ となる.

(注 8)商の微分の練習のために, $\dfrac{\tan x}{3\cos^2 x} + \dfrac{2\tan x}{3}$ を微分して $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ になることを確かめてみよ.

(25) $I_{25} = \int \left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)' dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$(注 9)

(26) $I_{26} = \int \left(\frac{\cos^3 x}{-3}\right)' dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

(27) $I_{27} = \int \left(\frac{\cos^4 x}{-4}\right)' dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

(28) $I_{28} = \int x' \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

【別解】$\sin^{-1} x = t$ とおくと, $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ であるので,

$$I_{28} = \int t\cos t dt = \int t(\sin t)' dt = t\sin t - \int \sin t dt = t\sin t + \cos t + C = x\sin^{-1} x + \cos(\sin^{-1} x) + C$$

としてもよい. 答えの見かけは違うが, 実は $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ なので同じものである(注 10).

(29) $I_{29} = \int x' \cos^{-1} x dx = x\cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C.$

【別解】$\cos^{-1} x = t$ とおくと, $x = \cos t$, $dx = \sin t dt$ となるので,

$$I_{29} = \int t\sin t dt = \int t(-\cos t)' dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t + C = -x\cos^{-1} x + \sin(\cos^{-1} x) + C.$$

(30) $I_{30} = \int x' \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$

【別解】$\tan^{-1} x = t$ とおくと, $\tan t = x$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ となるから,

$$\begin{aligned} I_{30} &= \int \frac{t}{\cos^2 t} dt = \int t(\tan t)' dt = t\tan t - \int \tan t dt = t\tan t + \int \frac{(\cos t)'}{\cos t} dt = t\tan t + \log|\cos t| + C \\ &= x\tan^{-1} x + \log|\cos(\tan^{-1} x)| + C. \end{aligned}$$

(31) 積和の公式を用いて計算する.

$$I_{31} = -\frac{1}{2}\int \{\cos 4x - \cos(-2x)\} dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 2x) dx = -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(32) 積和の公式を用いて計算する.

$$I_{32} = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

(33) まずは部分積分によって, 次のようになる:

$$I_{33} = \int x'(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx.$$

次に, $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} I_{33} &= x(\arcsin x)^2 + 2\int (\sqrt{1-x^2})' \arcsin x dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

(注 9) $I_{25} = -\int \left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)' dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$ としてもよい. 答えの見かけは違うが $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いて置き換えれば, $I_{25} = \frac{\sin^2 x}{2} + C - \frac{1}{2}$ となる. $C - \frac{1}{2}$ の部分は C が任意の定数のため $\frac{1}{2}$ のずれがあっても任意の定数と考えてよい.

(注 10) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ を示そう. $\sin^{-1} x = \theta$ とおくと, 値域の範囲を考えることで $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ であることがわかる. よって, $\cos\theta \ge 0$ であるので, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ となる. これは $\cos(\sin^{-1} x) = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ を意味する.

(34) まずは部分積分によって, 次のようになる:

$$\begin{aligned} I_{34} &= \int x'(\arccos x)^2 dx = x(\arccos x)^2 - \int x \cdot 2\arccos x \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ &= x(\arccos x)^2 + 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x dx \end{aligned}$$

このあとは, $(\sqrt{1-x^2})' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ であることに注意して計算すると,

$$\begin{aligned} I_{34} &= x(\arccos x)^2 + 2\int (-\sqrt{1-x^2})' \arccos x dx \\ &= x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x + 2\int \sqrt{1-x^2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ &= x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C. \end{aligned}$$

(35) 部分積分により,

$$\begin{aligned} I_{35} &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\arctan x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \arctan x dx \\ &= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \arctan x dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \arctan x dx + \frac{(\arctan x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

$\int \arctan x dx$ の部分には I_{30} の結果を代入すればよいので,

$$I_{35} = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 + \frac{(\arctan x)^2}{2} + x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

$\boxed{4}$ (1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log|\sin x| + C.$

(2) $I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{(x^2+2x-1)'}{x^2+2x-1} dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2x-1| + C.$

(3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{(1+\sin x+\cos x)'}{1+\sin x+\cos x} dx = \log|1+\sin x+\cos x| + C.$

(4) $I_4 = \displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx = \log(e^x + e^{-x}) + C.$

$\boxed{5}$

(1) $I_1 = \log|x + \sqrt{x^2+4}| + C.$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}}$ と変形し, $x + \frac{1}{2} = y$ とおけば, 次のようになる:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|y + \sqrt{y^2+\frac{1}{4}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

$\boxed{6}$ (1) 半角の公式 $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ より,$I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} + C$ となる(注 11).

(注 11) わかりにくければ $\frac{x}{2} = t$ とおいて計算すればよい.

$\boxed{7}$ (1) $x=\sin\theta$ とおくと, x が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで動くとき, θ は $-\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{3}$ まで動く. よって,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと, x が 1 から $\sqrt{3}$ まで動くとき, θ は $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{3}$ まで動く. よって,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 2\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

(3) $x=\tan\theta$ とおくと, x が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ から 1 まで動くとき, θ は $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{4}$ まで動く. よって,

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

(4) $x=2\tan\theta$ とおくと, x が -2 から $2\sqrt{3}$ まで動くとき, θ は $-\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{3}$ まで動く. よって,

$$I_4 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\tan^2\theta+4}\times\frac{2}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{24}\pi.$$

$\boxed{8}$ (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ では $|\sin 2x| = \sin 2x$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ では $|\sin 2x| = -\sin 2x$ となることに注意して,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin 2x dx$$

と分けて計算する. $x+\frac{\pi}{2}=t$ とおくと,

$$I_1 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin 2t dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} t\sin 2t dt \qquad \cdots ①$$

となる. $\int t\sin 2t dt = \int t\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)' dt = -\frac{t\cos 2t}{2} + \int \frac{\cos 2t}{2} dt = -\frac{t\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$ であるから, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin 2t dt = \left[-\frac{t\cos 2t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$ および $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin 2t dt = \left[-\frac{t\cos 2t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{5}{4}\pi$ を得る. ① に代入すれば, $I_1 = 2\pi$ を得る.