微分積分学 II　期末テスト（2018 年 2 月 7 日）1 枚目

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　点数 $\boxed{\text{平均点}}$ 62.51 点 (注 1)

$\boxed{1}$　xy 平面内の 2 つの直線 $y=1, x=1$ と 曲線 $y=1-x^2$ の囲む領域を D とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) D を xy 平面内に図示せよ．

(2) $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を縦線領域上の積分として表しなさい．

(3) I を横線領域上の積分として表しなさい．

(4) $f(x,y)=xe^y$ のときの重積分 I を計算せよ．

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) D の図は図 A の緑色の部分の領域である．

(2) 図 A から $D=\{(x,y)|\quad 0\le x\le 1,\quad 1-x^2\le y\le 1\}$ と読み取れるので, $I=\displaystyle\int_0^1\int_{1-x^2}^1 f(x,y)dydx$ である．

(3) 図 A から $D=\{(x,y)|\quad 0\le y\le 1,\quad \sqrt{1-y}\le x\le 1\}$ と読み取れるので, $I=\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{1-y}}^1 f(x,y)dxdy$ である．

(4) 横線領域上の積分として計算をしてみると,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_{\sqrt{1-y}}^1 xe^y dxdy = \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{1-y}}^1 e^y dy = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1-y}{2}\right)e^y dy = \frac{1}{2}\int_0^1 ye^y dy \\ &= \frac{1}{2}\left\{[ye^y]_0^1-\int_0^1 e^y dy\right\} = \frac{1}{2}\{e-(e-1)\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

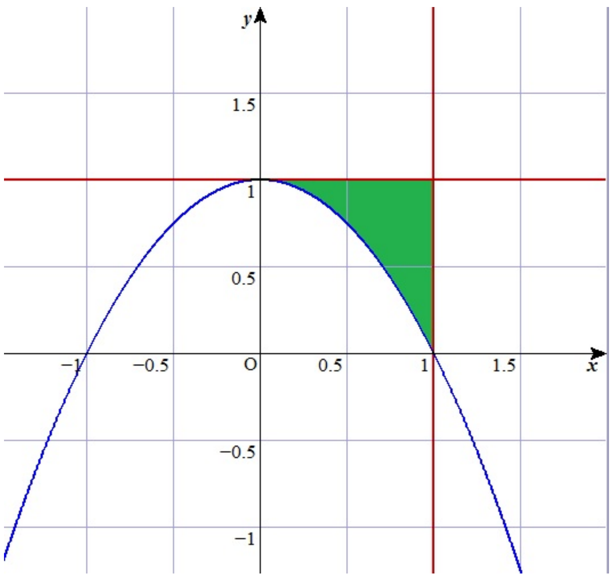

図 A

(注 1)学科別情報

$\boxed{\text{学科別平均点}}$

社環： 62.47 点　建築: 50.89 点　生命情報：56.60 点　システム生体：73.36 点　生物：受験者なし

$\boxed{\text{学科別最高点}}$

社環：96 点　建築：83 点　生命情報：91 点　システム生体：99 点　生物：受験者なし

$\boxed{2}$ 重積分 $I = \displaystyle\int_0^{\log 2}\int_{e^y}^{2} \frac{(x-1)y}{\log x} dxdy$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) I の積分領域を図示しなさい.

(2) I の積分順序を交換して, I の値を計算せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) I の積分領域を D とすると, $D = \{(x,y)|\quad 0 \le y \le \log 2, \quad e^y \le x \le 2\}$ となる. $e^y = x$ は曲線 $y = \log x$ を意味することに注意すれば, D は図の緑の領域となることがわかる.

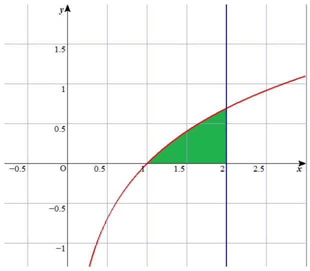

図 B

(2) (1) の図を参考にすれば, $I = \displaystyle\int_1^2\int_0^{\log x} \frac{(x-1)y}{\log x} dxdy$ と順序交換されるので,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{x-1}{\log x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\log x} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x-1)\log x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{x^2-2x}{2}\right)' \log x dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^2-2x}{2}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2-2x}{2} \times \frac{1}{x} dx\right) = -\frac{1}{4}\int_1^2 (x-2)dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2-4x}{2}\right]_1^2 = -\frac{1}{8}\{(4-8)-(1-4)\} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $D = \{(x,y)|\quad \sqrt{3} \le x+3y \le 3, \quad 0 \le x-5y \le \frac{\pi}{6}\}$ とするとき, 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{\tan(x-5y)}{9+(x+3y)^2} dxdy$ の値を計算せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $u = x+3y$, $v = x-5y$ とおくと, $x = \frac{5u+3v}{8}$, $y = \frac{u-v}{8}$ であるから, (x,y) の (u,v) に関するヤコビアンは, $\displaystyle\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}$ となる. よって,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{\tan v}{u^2+9} \cdot \left|-\frac{1}{8}\right| dudv = \frac{1}{8}\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{du}{u^2+9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan v dv = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{3} [-\log|\cos v|]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{1}{24}(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)) \left\{-(\log\frac{\sqrt{3}}{2} - \log 1)\right\} = \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \left(-\log\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{288}\log\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

□

微分積分学 II　期末テスト（2018 年 2 月 7 日）2 枚目

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$ $D = \{(x,y) \mid \quad x^2+y^2 \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ とするとき, 広義重積分 $I = \iint_D \frac{xye^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} dxdy$ の値を求めよ.

$\boxed{解答例}$ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと, (r,θ) は $1 \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を動く(注 2). ヤコビアンの r も考慮して,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\int_1^{\infty} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta \times e^{-r}}{r^2} rdrd\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_1^{\infty} re^{-r}dr = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\infty} r(-e^{-r})'dr \\ &= \frac{1}{2}\left\{[-re^{-r}]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-r}dr\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\left(0-\frac{1}{e}\right) + [-e^{-r}]_1^{\infty}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e} - \left(0 - \frac{1}{e}\right)\right\} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $D = \{(x,y) \mid \quad x^2+y^2 \leq 1\}, G = \{(x,y,z) \mid \quad (x,y) \in D, \quad 1-x^2-y^2 \leq z \leq 1+x^2+y^2\}$ とする. このとき, $I = \iiint_G z^2 dxdydz$ の値を求めよ.

$\boxed{解答例}$ まず, z についての累次積分として計算すると,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[\frac{z^3}{3}\right]_{1-x^2-y^2}^{1+x^2+y^2} dxdy = \frac{1}{3}\iint_D \left\{(1+x^2+y^2)^3 - (1-x^2-y^2)^3\right\} dxdy \\ &= \frac{1}{3}\iint_D \left[\left\{1+3(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)^3\right\} - \left\{1-3(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)^3\right\}\right] dxdy \\ &= \frac{1}{3}\iint_D \left\{6(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)^3\right\} dxdy \end{aligned}$$

を得る. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおけば, 続く計算は次のようになる:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (6r^2+2r^6) rdrd\theta = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 (3r^3+r^7)dr = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{3r^4}{4}+\frac{r^8}{8}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{7\pi}{6}.$$

(注 2) D を円の内側だと思っている人がわんさかいました. 問題ごとによく考えるようにしてください. 過去問を勉強するときにもきちんと理解しながら勉強しないとだめです.

$\boxed{6}$ $a > 0$ を定数とし, $G = \{(x, y, z) \mid \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$ とおく. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と変換することにより, 重積分 $I = \iiint_G \sqrt{z}dxdydz$ の値を求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と変換すると, r, θ, φ はそれぞれ $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動く. ヤコビアン $r^2\sin\theta$ も考慮して I を計算すると,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{r\cos\theta}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^a r^{\frac{5}{2}}dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\sin\theta d\theta$$

となる. 後者の積分を実行するために, $\cos\theta = t$ と置換積分する(注 3)と,

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{7}r^{\frac{7}{2}}\right]_0^a \int_1^0 \sqrt{t}(-dt) = \frac{\pi}{7}a^{\frac{7}{2}} \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{\pi}{7}a^{\frac{7}{2}}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{21}a^{\frac{7}{2}}.$$

(注 3) $\int_0^a r^{\frac{5}{2}}dr$ の部分ができていない人がわんさかいました.