微分積分学 II　期末テスト（2017 年 1 月 25 日）1 枚目

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿　点数 平均点 51.54 点 (注 1)

1　xy 平面内の直線 $y = 1 - 2x$ と 曲線 $y = 1 - x^2$ の囲む領域を D とし, 連続関数 $f(x,y)$ に対して $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) D を xy 平面内に図示し, $y = 1 - 2x$ と $y = 1 - x^2$ の共有点の座標を求めよ.

(2) I を縦線領域上の積分として表しなさい.

(3) I を横線領域上の積分として表しなさい.

(4) $f(x,y) = xy$ のときの重積分 I の値を計算せよ.

解答例 (1) $1 - 2x = 1 - x^2$ を解けば, $x = 0, 2$ を得る. $y = 1 - 2x$ に代入すれば, 共有点の座標は $(x,y) = (0,1), (2,-3)$ であることがわかる. D の図は図 A の緑色の部分の領域である.

(2) 図 A から $D = \{(x,y) |\quad 0 \le x \le 2,\quad 1-2x \le y \le 1-x^2\}$ と読み取れるので, $I = \int_0^2 \int_{1-2x}^{1-x^2} f(x,y)dydx$ である.

(3) 図 A から $D = \{(x,y) |\quad -3 \le y \le 1,\quad \frac{1-y}{2} \le x \le \sqrt{1-y}\}$ と読み取れるので, $I = \int_{-3}^{1} \int_{\frac{1-y}{2}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dxdy$ である.

(4) 縦線領域上の積分として計算をしてみると,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_{1-2x}^{1-x^2} xydydx = \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{1-2x}^{1-x^2} dx = \int_0^2 \left\{\frac{x(1-x^2)^2}{2} - \frac{x(1-2x)^2}{2}\right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^5 - 6x^3 + 4x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3} - 24 + \frac{32}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

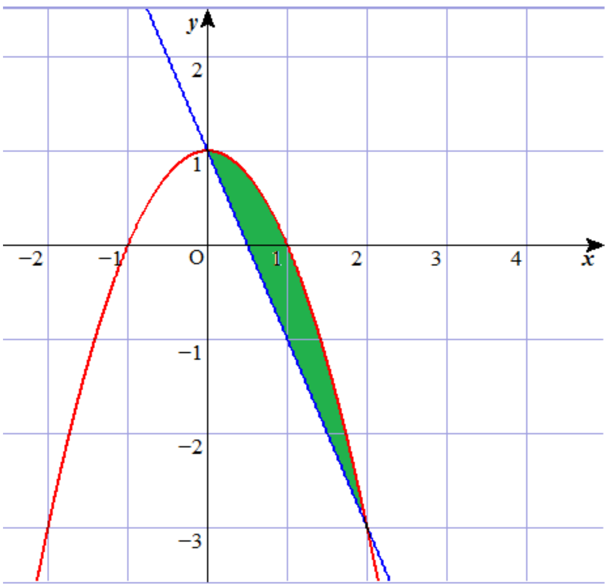

図 A

(注 1) 学科別情報

学科別平均点

社環： 48.17 点　建築: 45.55 点　生命情報：57.31 点　システム生体：57.71 点　生物：36.67 点

学科別最高点

社環：90 点　建築：80 点　生命情報：100 点　システム生体：83 点　生物：69 点

$\boxed{2}$ 重積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1}\sqrt{y}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dxdy$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) I の積分領域を図示しなさい.

(2) I の積分順序を交換せよ.

(3) I の値を計算せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) I の積分領域を D とすると, $D = \{(x, y) |\quad 0 \leq y \leq 1, \quad \sin^{-1}\sqrt{y} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ となる. $\sin^{-1}\sqrt{y} = x$ は曲線 $\sin x = \sqrt{y}$, すなわち, $y = \sin^2 x$ を意味する. このことに注意すれば, D は図の緑の領域となることがわかる.

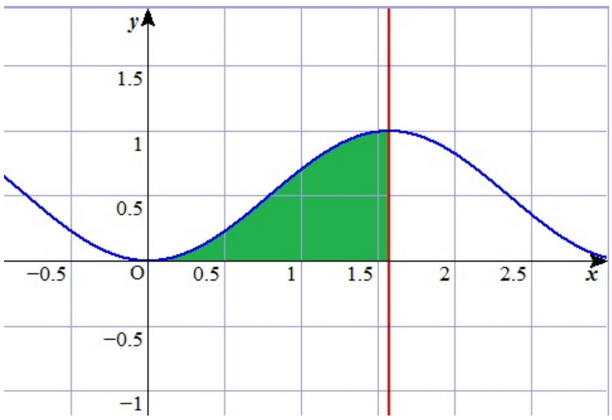

図 B

(2) (1) の図を参考にすれば, $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin^2 x} \frac{x}{\sin x} dydx$ と順序交換される.

(3) (2) の続きとして計算すればよいので,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = 1.$$

□

$\boxed{\text{注}}$ $y = \sin^2 x$ のグラフは 2 乗しているから絶対にマイナスにはならないのに, グラフが第 3・第 4 象限に食い込んでいる答案が多かったです. よく観察をしましょう.

$\boxed{3}$ $D = \{(x, y) |\quad 2 \leq x + y \leq 2\sqrt{3}, \quad 0 \leq x - 3y \leq \frac{\pi}{2}\}$ とするとき, 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{\sin^3(x - 3y)}{4 + (x + y)^2} dxdy$ の値を計算せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $u = x + y$, $v = x - 3y$ とおくと, $x = \frac{3u+v}{4}$, $y = \frac{u-v}{4}$ であるから, (x, y) の (u, v) に関するヤコビアンは, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}$ となる. よって,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sin^3 v}{4 + u^2} \cdot \left| -\frac{1}{4} \right| dudv = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{u}{2} \right]_2^{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v (1 - \cos^2 v) dv \\ &= \frac{1}{8} (\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1} 1) \left([-\cos v]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^3 v}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{\pi}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{\pi}{144}. \end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{注}}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v dv$ の計算は教科書 88 ページの公式を使えばもっと楽に計算できる. 上の解答例はその公式を忘れてしまった人用の解答例です.

微分積分学 II　期末テスト（2017 年 1 月 25 日） 2 枚目

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$　(1) $a, b > 0$ を定数とし, $D = \{(x,y) | \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\}$ とするとき, 広義重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2} dxdy$$

の値を求めよ.

(2) $a, b > 0$ を定数とし, $D = \{(x,y) | \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ とする. $f(x,y) = \log\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ に対して, $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ. なお, 途中計算で $\lim_{r \to +0} r^2 \log r$ など $0 \times \infty$ 型の不定形の極限の計算が出てくることに注意せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) 楕円型極座標 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ を考えると, (r, θ) は $1 \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を動く. ヤコビアンの abr も考慮して,

$$\begin{aligned} I &= a^2b \int_0^{\pi/2} \int_1^{\infty} \frac{r^2\cos\theta}{(1+r^2)^2} drd\theta = a^2b \int_1^{\infty} \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr = -\frac{a^2b}{2} \int_1^{\infty} r \left(\frac{1}{1+r^2}\right)' dr \\ &= -\frac{a^2b}{2} \left\{ \left[\frac{r}{1+r^2}\right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{1}{1+r^2} dr \right\} = -\frac{a^2b}{2} \left\{ -\frac{1}{2} - [\tan^{-1} r]_1^{\infty} \right\} = -\frac{a^2b}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^2b}{4} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

(2) $I_1 = \iint_D \log\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$, $I_2 = \iint_D \log\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$ とおく. 楕円型極座標 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \log r^2 \cdot abrdrd\theta = 4\pi ab \int_0^1 r\log rdr = 2\pi ab \int_0^1 (r^2)' \log rdr = 2\pi ab \left(\left[r^2 \log r\right]_0^1 - \int_0^1 r^2 \frac{1}{r} dr \right) \\ &= 2\pi ab \left(-\lim_{r \to +0} r^2 \log r - \frac{1}{2} \right) = 2\pi ab \left(-\lim_{r \to +0} \frac{\frac{1}{r}}{-2\frac{1}{r^3}} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi ab \left(-\lim_{r \to +0} \frac{-r^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\pi ab. \end{aligned}$$

(最後から 3 つ目の等式において, ロピタルの定理を用いた.) また,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \log(1-r^2) \cdot abrdrd\theta = \pi ab \int_0^1 (r^2-1)' \log(1-r^2)dr \\ &= \pi ab \left(\left[(r^2-1)\log(1-r^2)\right]_0^1 - \int_0^1 (r^2-1) \frac{-2r}{1-r^2} dr \right) \\ &= \pi ab \left(\lim_{r \to 1-0} \frac{\log(1-r^2)}{\frac{1}{r^2-1}} - [r^2]_0^1 \right) \\ &= \pi ab \left(\lim_{r \to 1-0} \frac{\frac{-2r}{1-r^2}}{\frac{-2r}{(r^2-1)^2}} - 1 \right) \\ &= \pi ab \left(\lim_{r \to 1-0} (1-r^2) - 1 \right) \\ &= -\pi ab. \end{aligned}$$

(最後から 3 つ目の等式において, ロピタルの定理を用いた.) よって, $I = -2\pi ab$.

$\boxed{5}$ $a > 0$ を定数とし, $G = \{(x, y, z) | \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad z \leq 0\}$ とおく. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と変換することにより, 重積分 $I = \iiint_G x^2 y dxdydz$ の値を求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と変換すると, r, θ, φ はそれぞれ $0 \leq r \leq a$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, $\pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$ の範囲を動く. ヤコビアン $r^2\sin\theta$ も考慮して I を計算すると,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^a (r\sin\theta\cos\varphi)^2 \cdot r\sin\theta\sin\varphi \times r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^a r^5\sin^4\theta\cos^2\varphi\sin\varphi drd\theta d\varphi \\ &= \frac{a^6}{6}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi \end{aligned}$$

となる. 後者の積分は

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{3}$$

である. 次に前者の積分を計算しよう. $\theta = \frac{\pi}{2} + t$ 変換するとき, $\sin\theta = \cos t$ であるので,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi.$$

従って, $I = \frac{a^6}{6} \times \frac{3}{16}\pi \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{96}a^6$. $\square$