微分積分学 II 期末試験 (2018 年 2 月 7 日)

担当：新國裕昭

約束

- 学生証 を持参し，机の通路側に置いて試験を受けること。
- 答えのみの解答は原則不可とします。計算の過程を必ず書いて，問題集の解答を作るつもりで答案を作成しましょう。答えのみの答案は，答えがあっていても加点しないか大幅に減点します。
- 携帯電話やスマートフォン，タブレットなどの通信機器は電源を切ってカバンにしまって下さい。（時計代わりに使用したり，外部との通信をしたりすることは禁止します。）
- 机の上には筆記用具，学生証，時計以外のものは置かないで下さい。電卓の使用は禁止です。
- カバンは閉めておくこと。特に，カバンから紙が飛び出していることがないようにすること。
- 開始の合図があるまで，学籍番号と氏名以外のものを書き込まないこと。
- 問題に不備があると感じた場合は，それを指摘することを問題とし，正しく指摘ができていることによって正解, 正しく指摘していなければ不正解とする。
- 解答は採点終了後，ホームページに掲載するので復習すること。
- 試験当日は，次の座席表にある場所に着席すること。

$\boxed{\text{出題内容}}$ (今年は計算量を減らす代わりに大問を 6 題用意しました)

$\boxed{1}$ 領域を図示し，領域を縦線領域または横線領域として表すことができ，それを利用して重積分の計算をすることができるか試験をします．レポート No.7, 練習問題 No. 8 などで練習しておくこと．

$\boxed{2}$ 縦線領域上の累次積分から横線領域上の累次積分へ（あるいはその逆も），積分順序の交換をすることができるか試験をします．レポート No.8, 演習問題 No.9 などで練習しておくこと．

$\boxed{3}$ 変数変換を用いて重積分を計算できるかどうかの試験をします (ヤコビアンを忘れずに！)．レポート No.9, 練習問題 No.10 もやっておくこと．今年は

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

($a \neq 0$, C は積分定数) を用いる問題を用意しました．$\tan^{-1} 1$, $\tan^{-1}\sqrt{3}$ などの値は求められるようにしておきましょう．また, 高校生の問題ですが, $\int \tan x dx$ は計算できるようにしておきましょう．

$\boxed{4}$ 極座標変換を用いて, 広義積分の計算ができるかどうかの試験をします．レポート No.10, 練習問題 11 などで練習しておくこと．計算の際, ヤコビアンを忘れないこと．当然, 1 変数の広義積分ができなければ 2 変数の広義積分もできませんので, 練習不足を感じる場合は 1 変数の広義積分の練習もしておきましょう．

$\boxed{5}$ 累次積分を利用した 3 重積分ができるかどうかの試験をします．講義ノートを参考にするなど, 164 ページの定理 11 を用いる計算練習をしておきましょう．

$\boxed{6}$ 3 重積分の計算ができるかどうかの試験をします. 以下の事をおさえておいてください.

- 3 次元極座標　$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$　とそのヤコビアン $r^2\sin\theta$ は覚えておくこと.
- 積分領域は $G = \{(x,y,z) \mid \quad x^2+y^2+z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$ ($a > 0$ は定数) とします．この場合, r, θ, φ がどの範囲を動くか考えておくこと.
- レポート No.11, 練習問題 No.12 などで練習しておくこと. 計算の際, ヤコビアンを忘れないこと.

※ ホームページにある前期科目の「解析 II」「微分積分学 2@芝浦工業大学」「微分積分学 2 演習@芝浦工業大学」も同じ内容の科目です. 既にたくさんの問題が出そろっているので, 「微分積分学 II」の過去問以外にも可能な限りたくさん問題を解いて, 計算力を養っておきましょう.

微分積分学 II　期末テスト（2018 年 2 月 7 日）1 枚目

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　点数＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ xy 平面内の 2 つの直線 $y = 1, x = 1$ と 曲線 $y = 1 - x^2$ の囲む領域を D とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) D を xy 平面内に図示せよ.

(2) $I = \iint_D f(x, y)dxdy$ を縦線領域上の積分として表しなさい.

(3) I を横線領域上の積分として表しなさい.

(4) $f(x, y) = xe^y$ のときの重積分 I を計算せよ.

$\boxed{2}$ 重積分 $I = \displaystyle\int_0^{\log 2}\int_{e^y}^{2} \frac{(x-1)y}{\log x} dxdy$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) I の積分領域を図示しなさい.

(2) I の積分順序を交換して, I の値を計算せよ.

$\boxed{3}$ $D = \{(x,y) | \quad \sqrt{3} \le x+3y \le 3, \quad 0 \le x-5y \le \frac{\pi}{6}\}$ とするとき, 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{\tan(x-5y)}{9+(x+3y)^2} dxdy$ の値を計算せよ.

微分積分学 II　期末テスト（2018 年 2 月 7 日）2 枚目

学籍番号 ______________________　　氏名 ______________________

$\boxed{4}$　$D = \{(x, y) \mid \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ とするとき, 広義重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{xye^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} dxdy$ の値を求めよ.

$\boxed{5}$ $D = \{(x, y) \mid \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$, $G = \{(x, y, z) \mid \quad (x, y) \in D, \quad 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$ とする．このとき, $I = \displaystyle\iiint_G z^2 dxdydz$ の値を求めよ.

$\boxed{6}$ $a > 0$ を定数とし, $G = \{(x, y, z) | \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$ とおく. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と変換することにより, 重積分 $I = \iiint_G \sqrt{z}dxdydz$ の値を求めよ.