# 微分積分学 II 期末試験 (2017 年 1 月 25 日)

担当：新國裕昭

約束

- 学生証 を持参し，机の通路側に置いて試験を受けること。
- 答えのみの解答は原則不可とします。計算の過程を必ず書いて，問題集の解答を作るつもりで答案を作成しましょう。答えのみの答案は，答えがあっていても加点しないか大幅に減点します。
- 携帯電話やスマートフォン，タブレットなどの通信機器は電源を切ってカバンにしまって下さい。（時計代わりに使用したり，外部との通信をしたりすることは禁止します。）
- 机の上には筆記用具，学生証，時計以外のものは置かないで下さい。電卓の使用は禁止です。
- カバンは閉めておくこと。特に，カバンから紙が飛び出していることがないようにすること。
- 開始の合図があるまで，学籍番号と氏名以外のものを書き込まないこと。
- 問題に不備があると感じた場合は，それを指摘することを問題とし，正しく指摘ができていることによって正解, 正しく指摘していなければ不正解とする。
- 解答は採点終了後，ホームページに掲載するので復習すること。
- 試験当日は，次の座席表にある場所に着席すること。

$\boxed{\text{出題内容}}$ (各 20 点で以下の内容を出題します.)

$\boxed{1}$ 領域を図示し，領域を縦線領域または横線領域として表すことができ，それを利用して重積分の計算をすることができるか試験をします. レポート No.7, 練習問題 No. 8 などで練習しておくこと.

$\boxed{2}$ 縦線領域上の累次積分から横線領域上の累次積分へ（あるいはその逆も），積分順序の交換をすることができるか試験をします. レポート No.8, 演習問題 No.9 などで練習しておくこと. 今年は逆三角関数の $y = \sin^{-1} x$ を絡めた問題を用意しました. $-1 \leq x \leq 1$ であれば, $y = \sin^{-1} x \Longleftrightarrow x = \sin y$ であることを思い出しておきましょう.

$\boxed{3}$ 変数変換を用いて重積分を計算できるかどうかの試験をします (ヤコビアンを忘れずに！). レポート No.9, 練習問題 No.10 もやっておくこと. 今年は

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

($a \neq 0$, $C$ は積分定数) を用いる問題を用意しました. $\tan^{-1} 1$, $\tan^{-1} \sqrt{3}$ などの値は求められるようにしておきましょう. 高校生の問題ですが, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ は計算できるようにしておきましょう (教科書 88 ページの公式を用いても構いません.).

$\boxed{4}$ 楕円型の極座標変換を用いて, 広義積分の計算ができるかどうかの試験をします. レポート No.10, 練習問題 11 などで練習しておくこと. 計算の際, ヤコビアンを忘れないこと. 当然, 1 変数の広義積分ができなければ 2 変数の広義積分もできませんので, 練習不足を感じる場合は 1 変数の広義積分の練習もしておきましょう. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^2}{(1 + r^2)^2} dr$ ができれば, ほとんど同じ積分をすることになるので大丈夫でしょう.

$\boxed{5}$ 3 重積分の計算ができるかどうかの試験をします. 以下の事をおさえておいてください.

- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 \theta d\theta$, $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta$ を計算できるようにしておくこと. 後者は高校生向けの問題です. 前者は, $\theta = \frac{\pi}{2} + t$ と置換積分をしたあとに, 教科書 88 ページの公式を使えば楽に計算できます. あるいは, 倍角の公式を使って次数を落としていくのもひとつの手でしょう.
- 3 次元極座標 $\quad x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta \quad$ とそのヤコビアン $r^2 \sin\theta$ は覚えておくこと.
- 積分領域は $G = \{(x, y, z) | \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad z \leq 0\}$ ($a > 0$ は定数) とします. この場合, $r, \theta, \varphi$ がどの範囲を動くか考えておくこと.
- レポート No.11, 練習問題 No.12 などで練習しておくこと. 計算の際, ヤコビアンを忘れないこと.

※ ホームページにある前期科目の「解析 II」「微分積分学 2@芝浦工業大学」「微分積分学 2 演習@芝浦工業大学」も同じ内容の科目です. 既にたくさんの問題が出そろっているので, 「微分積分学 II」の過去問以外にも可能な限りたくさん問題を解いて, 計算力を養っておきましょう.

微分積分学 II　期末テスト（2017 年 1 月 25 日）　1 枚目

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　点数＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $xy$ 平面内の直線 $y = 1 - 2x$ と 曲線 $y = 1 - x^2$ の囲む領域を $D$ とし, 連続関数 $f(x,y)$ に対して $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $D$ を $xy$ 平面内に図示し, $y = 1 - 2x$ と $y = 1 - x^2$ の共有点の座標を求めよ.

(2) $I$ を縦線領域上の積分として表しなさい.

(3) $I$ を横線領域上の積分として表しなさい.

(4) $f(x,y) = xy$ のときの重積分 $I$ の値を計算せよ.

$\boxed{2}$　重積分 $I = \int_0^1 \int_{\sin^{-1}\sqrt{y}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dxdy$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $I$ の積分領域を図示しなさい.

(2) $I$ の積分順序を交換せよ.

(3) $I$ の値を計算せよ.

$\boxed{3}$ $D = \{(x, y) | \quad 2 \leq x + y \leq 2\sqrt{3}, \quad 0 \leq x - 3y \leq \frac{\pi}{2}\}$ とするとき, 重積分 $I = \iint_D \frac{\sin^3(x - 3y)}{4 + (x + y)^2} dxdy$ の値を計算せよ.

微分積分学 II　期末テスト（2017 年 1 月 25 日）　2 枚目

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$ (1) $a, b > 0$ を定数とし, $D = \{(x,y) | \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\}$ とするとき, 広義重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2} dxdy$$

の値を求めよ.

(2) $a, b > 0$ を定数とし, $D = \{(x,y) | \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ とする. $f(x,y) = \log\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ に対して, $I = \iint_D f(x,y) dxdy$ の値を求めよ. なお, 途中計算で $\lim_{r \to +0} r^2 \log r$ など $0 \times \infty$ 型の不定形の極限の計算が出てくることに注意せよ.

$\boxed{5}$ $a > 0$ を定数とし, $G = \{(x,y,z) | \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad z \leq 0\}$ とおく. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と変換することにより, 重積分 $I = \iiint_G x^2 y\,dxdydz$ の値を求めよ.

$\boxed{\text{調査}}$ $\boxed{1}$から$\boxed{5}$までを解き終えるまでに何分かかったか教えてください.